
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01180300 4

LES

ATOMES ET HYPOTHÈSES

DANS LA GÉOMÉTRIE

70

LES

ATOMES ET HYPOTHÈSES

DANS LA GÉOMÉTRIE

PAR

Joseph Florentin
J.-F. BONNEL

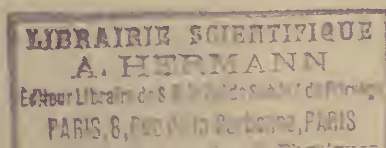
Ancien élève de l'Ecole Normale supérieure,
Agrégé des Sciences mathématiques,
Professeur honoraire du Lycee Ampère.

NOUVELLE ÉDITION

AVEC 25 FIGURES INTERCALÉES DANS LE TEXTE



LYON
ALEXANDRE REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
4, RUE GENTIL, 4
—
1897



PRÉFACE

Le lecteur trouvera réunies, dans ce volume, mes cinq Études sur les Hypothèses, *qui ont été publiées dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon (tomes III et IV, 3e série). Presque rien n'a été changé à l'ordre des chapitres qui m'ont conduit à la théorie des* Atomes, *dans la géométrie.*

Justifier les programmes adoptés en France pour l'enseignement des mathématiques ; simplifier l'application des mêmes programmes, précisément dans leurs points les plus difficiles ; enfin, réduire à l'absurde des écarts lamentables de l'imagination, dans une science qui est toute

de raisonnement : tels sont les résultats très clairs que l'on obtient en remplaçant partout le zéro par l'atome.

L'évolution vers l'atome a déjà été tentée, mais sans succès, parce que la tentative était faite d'instinct et sans aucun motif à l'appui. Il semble, à la suite de ces pages, qu'elle s'impose au nom de la raison.

Certainement cette évolution, qui comporte une réforme des habitudes, contrariera beaucoup les partisans du statu quo *dans l'école et dans les livres. Elle ne satisfera pas non plus certains novateurs trop avides de bouleversement dans les idées. Mais les maîtres qui réfléchissent, et qui suivent attentivement le mouvement des esprits, reconnaîtront qu'elle est plus que jamais opportune; ils sauront tous devenir atomistes.*

Lyon, le 2 Février 1897.

J.-F. BONNEL.

LES ATOMES ET HYPOTHÈSES DANS LA GÉOMÉTRIE

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

C'est en étudiant les conditions normales du parallélisme de deux droites que nous avons été amené à reconstruire les éléments de la théorie atomique. Cette théorie s'est trouvée en pleine contradiction avec l'hypothèse non euclidienne, et en parfait accord avec la géométrie classique, ce qui nous a décidé à condamner l'une en justifiant l'autre.

Nous nous sommes demandé ensuite si les propriétés de l'atome n'étaient pas incompatibles avec le procédé des limites et le calcul infinitésimal. Comme tout se tient et tout s'enchaîne

dans les principes de cette théorie, il nous a été facile de reconnaître que ces deux méthodes mathématiques, non seulement pouvaient s'accommoder de l'atome, mais qu'elles gagneraient beaucoup à l'introduction de cet élément dans ce qu'elles ont de fondamental. Nous avons même pu donner, en passant, une démonstration de l'axiome de Leibnitz, basée sur l'atome.

Nous objectera-t-on que ce recours aux atomes revient purement et simplement à remplacer une hypothèse par une autre hypothèse? Non; car l'atome n'a rien d'hypothétique, pas plus que son inverse l'indéfiniment grand; ni l'un ni l'autre ne sont des produits de cette faculté « maîtresse d'erreur et de fausseté » dont parle Pascal, et tous les deux sont des êtres de raison. S'il est difficile de les imaginer, il est impossible de ne les pas concevoir. Peut-on concevoir, en effet, qu'une grandeur, variant d'une manière continue, diminue jusqu'à devenir zéro, sans passer par un état préalable dans lequel elle n'a rien de plus petit qu'elle, si ce n'est zéro? Dans cet état, quel qu'il soit, elle est l'atome des grandeurs de son espèce, et l'inverse de l'atome, qui est l'indéfiniment grand ou l'indéfini, s'obtient semblablement. Tel est el point de départ de notre théorie atomique.

Il n'est pas permis de dire que l'atome d'une grandeur est zéro ; le zéro n'est une grandeur d'aucune espèce, c'est un symbole destiné à représenter toute espèce de grandeur, à l'état de néant, et le néant ne se spécifie ni ne se mesure. L'inverse de zéro, c'est l'infini, et le signe de l'infini n'est encore qu'un symbole destiné à représenter une grandeur dans un état, qu'il est aussi impossible de spécifier et de mesurer que le néant.

On conçoit parfaitement qu'une grandeur puisse augmenter ou diminuer de manière à devenir aussi grande ou aussi petite qu'on le veut, c'est-à-dire indéfiniment grande ou indéfiniment petite. L'indéfiniment grand et l'indéfiniment petit sont le résultat possible d'une opération, graphique ou arithmétique ; on peut les atteindre par la pensée, en doublant ou dédoublant sans cesse une grandeur finie prise pour point de départ ; cela revient à dire qu'on peut comprendre une multiplication ou une division poussée aussi loin qu'on le veut. Vous arrivez ainsi, et de mille manières différentes, à l'indéfini et à l'atome ; mais vous ne parvenez pas à l'infini, qui est sans bornes, sans extrémités, ni au zéro qui correspond à une quantité anéantie.

Au surplus, si des multiplications successives

pouvaient vous conduire mentalement à l'infini, ou des divisions successives à zéro, il faudrait qu'on pût exprimer le résultat de toutes ces opérations mentales par une suite de termes sans fin, s'il n'y a pas d'atome ; or, nous verrons que Galilée, Cauchy et d'autres géomètres ont démontré qu'il est impossible d'admettre l'existence d'une série quelconque de termes infinie en nombre, sans se mettre en contradiction avec la supposition même qu'on a faite. Le zéro et l'infini sont donc deux symboles de résultats qui échappent à tout algorithme, l'un par défaut d'étendue, l'autre par excès, et qui sont incapables d'éveiller dans l'esprit aucune idée de leur origine spéciale, puisque toutes les quantités y vont se confondre dans le même abîme de petitesse ou de grandeur.

S'il existe des grandeurs à l'état d'atome, cet atome est lui-même une grandeur, qui ne peut être réduite à zéro par aucune division ; l'atome est donc indivisible, quoique possédant de l'étendue. Il en est de même de l'infini, qui a de l'étendue sans être divisible d'aucune façon. Cette propriété de l'atome et de l'infini correspond d'ailleurs à la propriété contraire de leurs inverses, qui est d'être divisibles l'un et l'autre d'une infinité de manières.

La méthode des indivisibles, auxquels nous sommes ainsi conduit, est-elle une nouveauté si étrange? Nous voyons bien que, dans les livres qui se publient aujourd'hui, on transporte souvent à l'infini un point, une droite, un plan et qu'on les en ramène, comme si l'intervalle de l'indéfini à l'infini n'existait pas. Mais où est la certitude? Au XVII[e] et au XVIII[e] siècle, les deux symboles, ∞ et o, étaient toujours employés avec une extrême circonspection. Leibnitz et Newton se sont défendus d'avoir voulu introduire des quantités nulles dans leurs calculs. Pour eux, le repos était un mouvement indéfiniment petit et la coïncidence une distance indéfiniment petite. Ils avaient compris qu'un repos absolu ou zéro, qu'une longueur éternelle ou infinie ne peut être l'objet, ni le but d'aucune opération précise. Les rapports qu'ils établissaient, entre leurs quantités *évanouissantes*, étaient considérés par eux avant l'instant où ces quantités deviennent nulles, autant dire quand elles sont à l'état d'atomes, et, si l'on a pu représenter un coefficient différentiel par le quotient $\frac{0}{0}$, c'est uniquement parce que ce quotient est le symbole de l'indétermination et, comme tel, équivaut à tout ce qu'on veut. Peut-

on oublier, d'ailleurs, que les travaux de Leibnitz et Newton avaient été précédés de ceux de Cavalieri, Pascal, Descartes, Fermat, Wallis et Barrow, qui tous étaient des adeptes plus ou moins déguisés de la doctrine des indivisibles.

Sans doute, les contemporains de Leibnitz furent séduits par la beauté du calcul qui venait d'être découvert, et, pendant plus d'un siècle, sans s'inquiéter des principes de la nouvelle méthode, les géomètres l'appliquèrent avec succès à des recherches de plus en plus nombreuses. Les indivisibles disparurent facilement sous les multiples applications de l'algèbre à la géométrie. Il est vrai que la géométrie de Descartes s'appuie sur la continuité des courbes algébriques ; mais cette continuité ne contredit nullement la théorie des indivisibles, elle l'engendre forcément, au contraire, en engendrant l'atome, ainsi qu'on le verra plus loin. On crut apercevoir cependant une sorte de corrélation entre la continuité d'une ligne et sa divisibilité à l'infini, bien que l'impossibilité de cette dernière eût été démontrée. Les philosophes s'emparèrent de la question, confondant la *divisibilité indéfinie*, qui est possible, avec la *divisibilité à l'infini*, qui est impossible, et finirent par

formuler une antinomie là où il n'y avait qu'une harmonie méconnue.

A la fin du XVIIIe siècle, on se moquait de Roberval, déjà vieux, lorsqu'il conseillait et essayait de reprendre les axiomes de la géométrie et de les démontrer. Les appels de Lagrange, qui avait la conscience de cette situation faussée, ne suffirent pas à remettre l'atome en honneur. Presque de nos jours, on a vu Legendre faire de vains efforts pendant trente années pour démontrer le postulatum d'Euclide, en se passant de l'atome. C'est sur la négation de l'atome que repose aujourd'hui tout le système de la géométrie non euclidienne.

Quand donc nous venons dire aux géomètres : l'infini n'est pas l'indéfini, le zéro n'est pas l'atome, et, à prendre l'un pour l'autre, certainement vous vous trompez ; quand nous conseillons aux analystes de s'arrêter à l'atome et de regarder la dérivée d'une fonction comme le rapport de deux atomes correspondants, au lieu d'y voir celui de deux quantités nulles, ce n'est pas une innovation qu'on leur propose, mais un retour à la saine logique infinitésimale.

Pourquoi ne reviendrait-on pas franchement à l'atome, bien qu'il soit aujourd'hui abandonné à ce point que le fait seul d'en parler passe pour

une nouveauté? On a beaucoup disserté dans ces derniers temps sur la banqueroute de la science. La banqueroute n'est pas à redouter pour elle, mais à la condition qu'on ne lui demande que ce qu'elle peut donner. Même les mathématiques ont des bornes, qu'il importe de respecter, si l'on ne veut pas s'égarer. Ces bornes sont l'atome, d'une part, et l'indéfini, de l'autre ; en deçà du premier et au delà du second, tout est mystérieux, et ce n'est qu'entre les deux que la science peut se mouvoir en pleine sécurité.

L'atome étant, quoi qu'on fasse et quoi qu'on dise, la seule base rationnelle de toute logique géométrique, nous tenons pour certain ce qui s'accorde avec lui et pour faux ce qui l'exclut. C'est ainsi que l'hypothèse non euclidienne de Lobatschewsky, l'antinomie de Kant, la divisibilité à l'infini, admise par tant de géomètres, tous les paradoxes qui en résultent et qui sont inconciliables avec l'atome, doivent être qualifiés de pures chimères. Par contre, la géométrie d'Euclide, l'algèbre ordinaire et l'analyse infinitésimale, qui s'accommodent parfaitement avec l'atome dans ce qu'elles ont de plus intime, forment par leur ensemble le vrai domaine des sciences exactes.

Quant à la multitude de spéculations sur l'in-

fini, où l'on est obligé, pour trouver un sens aux théorèmes qu'on rencontre, de commencer par enlever aux mots *droite*, *longueur*, *distance*, *surface*, leur signification habituelle, elles peuvent aussi se reléguer dans le pays des chimères, car elles n'ont rien de plus atomique que la géométrie de Lobatschewsky. Disons le mot qui leur convient : ce n'est pas de la science, c'est le roman de la science.

CHAPITRE II

LE FINI, L'INDÉFINI ET L'INFINI

On est habitué à regarder les théorèmes de la géométrie comme étant l'expression de vérités certaines et immuables. Cependant tout le monde admet qu'au début de la science il est une proposition, connue sous le nom de postulatum d'Euclide, qui n'a pas encore reçu jusqu'à présent de démonstration. Depuis quelque temps, la situation particulière de ce postulatum indémontré a frappé certains esprits et les a décidés, en fin de compte, à ne lui accorder que les qualités ordinaires d'une simple hypothèse. Et, comme à une hypothèse il est toujours permis d'opposer une autre hypothèse, les néo-géomètres ont imaginé de construire tout un système qui répond à l'hy-

pothèse contraire du postulatum d'Euclide. Après eux, les philosophes se sont engagés dans la partie, et l'ont conduite beaucoup plus loin, par esprit d'extension. Je ne suivrai pas ces derniers ; il ne s'agit pas de faire de la philosophie proprement dite dans cette étude, mais seulement d'analyser d'une façon toute géométrique l'essence de ces deux hypothèses contraires, et de signaler les conséquences immédiates qui en ressortent.

Le postulatum d'Euclide revient à dire que, dans un triangle, la somme des angles égale deux angles droits. Il y a évidemment deux contre-parties, savoir : dans un triangle, la somme des angles est plus grande que deux droits, ou bien cette somme est plus petite que deux droits. On sait d'ailleurs, depuis Legendre, que, si la somme des angles égale deux droits dans un triangle, il en est de même dans tous les triangles possibles ; on sait aussi que, si la somme des angles est plus petite que deux droits dans un triangle, il en est de même dans tous les triangles possibles ; d'où l'on peut conclure que, si la somme des angles était plus grande que deux droits dans un seul triangle, il en serait de même dans tous les triangles possibles.

Mais, Legendre ayant démontré que dans un

triangle la somme des angles ne peut surpasser deux droits, cette dernière supposition doit être écartée, et il ne reste plus en réalité que deux hypothèses géométriques, qui s'excluent réciproquement : celle d'Euclide, qui remonte à 2300 ans, d'après laquelle la somme des angles est constante et égale à deux droits dans tous les triangles ; celle de Lobatschewsky, qui date de 1840, d'après laquelle la somme des angles est plus petite que deux droits dans tous les triangles, mais variable d'un triangle à l'autre, les petits ayant une somme plus grande que les grands, ce qui détruit *a priori* toute possibilité de la similitude, au sens ordinaire du mot.

Je commencerai par fixer le sens de certains termes qui reviendront continuellement dans cette étude et qui sont loin d'avoir une signification claire et précise pour tout le monde. Il s'agit des mots *fini*, *indéfini*, *infini*. Une ligne est dite *finie*, si elle s'étend à partir d'un de ses points jusqu'à une certaine extrémité ; elle est dite *indéfinie*, si elle peut augmenter ou diminuer à partir d'un de ses points autant qu'on le veut, sans cesser d'être finie, c'est-à-dire sans cesser d'avoir une extrémité ; elle est dite *infinie*, si elle n'est pas finie, ni indéfinie.

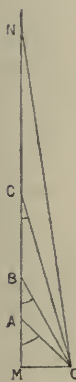
D'après cela, une ligne peut être indéfinie de deux manières, elle peut être indéfiniment petite ou indéfiniment grande ; remarquons d'ailleurs que cette expression n'était pas employée avec ce sens avant le XVIIe siècle, elle n'a pris naissance qu'à l'époque de l'invention du calcul infinitésimal, c'est-à-dire à l'époque de Newton et de Leibnitz. Il y a aussi deux sortes d'infini, l'infiniment petit et l'infiniment grand, suivant que l'extrémité variable du fini a disparu en se rapprochant du point de départ ou en s'en éloignant au delà de toute distance ; autrement dit, une ligne qui devient infiniment petite se réduit à un point mathématique, et une ligne qui devient infiniment grande n'a plus d'extrémité. Le mot infini a donc pour nous un sens purement négatif par rapport aux deux autres.

Ces trois définitions s'appliquent à une ligne, mais elles peuvent évidemment convenir à toute espèce de grandeurs. Elles suffisent d'ailleurs à caractériser tous les modes d'étendue dont une figure quelconque est susceptible. Le fini est fourni par l'expérience ; nous ne touchons, nous ne voyons que des formes finies : du fini à l'indéfini, le rapport est facile à saisir ; l'imagination y suffit, puisque l'indéfini est une variété du fini.

Mais il n'en est pas de même de la différence entre l'indéfini et l'infini ; l'imagination ne suffit pas à les distinguer, bien que cette différence existe : l'expérience et l'imagination sont incapables de nous montrer ce qui n'a pas d'extrémité, et c'est seulement par un acte de la raison pure que nous concevons cet état d'une ligne qui est plus petite que tout ce qu'on peut imaginer d'indéfiniment petit, ou encore qui est plus grande que tout ce qu'on peut imaginer d'indéfiniment grand. Nous représentons, dans le calcul, l'un des résultats de cette conception par le symbole o et l'autre par ∞, mais nous ne pouvons atteindre par l'imagination que des quantités indéfiniment croissantes ou décroissantes.

Bien que les deux hypothèses géométriques que je vais examiner soient contradictoires, elles ne le sont qu'à partir du théorème relatif à la somme des angles d'un triangle. Il y a donc un certain nombre de propositions qui sont vraies dans l'une comme dans l'autre hypothèse : il y a d'abord toutes celles qui précèdent, dans les Éléments ordinaires, le postulatum d'Euclide ; il y en a encore d'autres, ce sont celles qui ne dépendent pas absolument de ce postulatum. On dé-

montre, par exemple, qu'on peut mener d'un point extérieur à une droite donnée une oblique faisant avec la droite, à partir d'un angle droit, un angle aussi petit qu'on veut. La démonstration de ce théorème s'établit, dans les deux hypothèses, ainsi qu'il suit :



Soit O le point donné et MN la droite. Prenons MA=MO, AB=AO, BC=BO, et ainsi de suite. Selon l'hypothèse qu'on aura choisie, on aura successivement, l'angle droit étant l'unité d'angle :

$$A \leqq \frac{1}{2},\ B \leqq \frac{1}{4},\ C \leqq \frac{1}{8},\ \text{etc.}\ ;$$

et, en général, $N \leqq \frac{1}{2^n}$.

Comme il est possible de répéter la construction autant de fois qu'on le veut, la fraction $\frac{1}{2^n}$ et, par suite, l'angle N pourra devenir aussi petit qu'on voudra ; c'est ce qu'on exprime en disant que cet angle peut diminuer indéfiniment, l'indéfiniment petit étant ce qui devient aussi petit qu'on veut, sans cesser d'être fini.

Rapprochons maintenant cette proposition des trois définitions que j'ai rappelées plus haut, pour en découvrir l'exacte portée. Il est certain que l'angle obtenu par la construction précédente

peut diminuer indéfiniment ; mais cet angle peut-il diminuer infiniment, c'est-à-dire devenir nul ou égal à zéro, il est permis de se poser la question. Supposons pour un instant qu'en prolongeant la construction précédente, effectivement ou par la pensée, on ait trouvé un angle égal à zéro ; le sommet N de cet angle, si éloigné qu'il soit, appartiendra, en vertu de la construction même, à la droite donnée et à une oblique, ON par exemple ; et, dans le triangle ONC qui l'aura fourni, si l'angle N est supposé nul, l'angle NOC sera nul aussi, puisque le triangle est isocèle. Mais l'angle NOC ne peut être nul qu'à la condition que les deux droites, OC et ON, qui partent du point donné O, se confondent en une seule et même droite ; or, si ces deux droites n'en font qu'une, elles devront rencontrer la droite donnée sous le même angle ; donc, si le premier angle N est nul, le second C doit l'être aussi, le troisième également, et, en remontant l'échelle des constructions qu'on a faites, on trouve que toutes les obliques menées du point O doivent faire avec la droite donnée des angles nuls, ce qui est absurde, le point O étant supposé extérieur à la droite donnée.

Cette conclusion paraît singulière au premier

abord. Je tiens pourtant à faire observer qu'elle est vraie, quelle que soit l'hypothèse qu'on choisisse, c'est-à-dire quelle que soit la somme des angles d'un triangle, pourvu qu'on accepte que deux droites d'un plan, qui partent du même point et font entre elles un angle nul, se confondent en une seule et même droite.

Je ferai observer encore qu'on peut arriver à la même conclusion par une considération prise à peu près en dehors de toute construction géométrique. Si vous regardez un objet, un crayon par exemple, d'une certaine distance, vous le voyez sous un angle qui est déterminé par les deux rayons visuels menés de l'œil aux extrémités de l'objet ; si le point d'où vous regardez s'éloigne dans une direction perpendiculaire à l'objet, l'angle diminue, et, si vous supposez que ce point s'éloigne indéfiniment, supposition qui est permise, l'angle diminuera lui-même indéfiniment. De là, à conclure que, si le point *s'éloigne à l'infini*, l'angle deviendra nul, il n'y a qu'un pas à faire. C'est précisément ce pas qu'il est impossible de franchir, si simple que cela paraisse. Un point, en effet, ne peut pas être transporté à l'infini, en restant sur une droite , car, si cela était possible, ce point marquerait quelque part l'extrémité de

la droite, la droite alors ne serait pas infinie, puisqu'une ligne infinie n'a pas d'extrémité. Si l'on veut absolument donner un sens à cette manière de parler, il faut accorder qu'un point qui *s'éloigne à l'infini* sur une droite est obligé pour y arriver de *sortir de la droite*, attendu qu'il ne peut pas y rester sans contradiction dans les termes. Nous verrons plus loin ce qu'on doit entendre par là, mais, pour le moment, il faut renoncer à trouver sur une droite un point situé à l'infini ; cette situation n'existe pas pour un point.

Le fait de ne pas pouvoir se réduire à zéro par une construction géométrique n'est point particulier à l'angle, nous le retrouvons par le même raisonnement pour une longueur, arc de cercle ou ligne droite, qu'on divise en parties de plus en plus petites. Lorsqu'on divise avec le compas une longueur donnée en deux parties égales, puis chaque partie en deux autres, et ainsi de suite, il est clair qu'on peut obtenir des parties aussi petites qu'on le veut, c'est-à-dire indéfiniment petites ; il suffit de répéter l'opération, en pensée ou en acte, autant de fois qu'il est nécessaire. Mais sera-t-il possible d'obtenir de la sorte une partie infiniment petite, c'est-à-dire de longueur nulle ? Évidemment non ; en effet, si l'on parve-

nait à trouver au bout du compas mental cette partie de longueur nulle, que vous espérez, l'autre partie, qui lui est égale, serait aussi de longueur nulle, et les deux parties, qui forment ensemble la dernière longueur divisée, donneraient un total de longueur nulle ; l'avant-dernière aurait de même une longueur nulle, et, en remontant l'échelle des constructions qu'on aurait faites, on trouverait que toutes les lignes divisées seraient de longueur nulle, ce qui est absurde.

Au surplus, tous ces faits se traduisent mot à mot en chiffres, sans que rien y soit changé. La série des nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots \frac{1}{2^n}$ représente exactement l'état des parties que vous obtenez par la division géométrique ; vous pourrez trouver un nombre n, tel que $\frac{1}{2^n}$ soit aussi petit qu'on le voudra, mais il n'y a pas de nombre qui puisse rendre $\frac{1}{2^n}$ égal à zéro ; il faudrait un nombre infini, et ce nombre n'existe pas. Si l'on dit, en algèbre, que $\frac{1}{2^n} = 0$, lorsque $n = \infty$, c'est uniquement pour avoir un symbole destiné à représenter le résultat d'une conception propre à l'esprit de généralisation de l'algèbre.

Que faut-il donc conclure strictement de là ? Le voici : la construction géométrique adoptée permet de mener, par un point extérieur à une droite, des obliques qui font avec la droite, à partir d'un angle droit, tous les angles aigus possibles, si petits soient-ils, mais elle ne peut pas en donner une qui fasse avec la droite un angle nul. Elle permet donc d'atteindre l'indéfiniment petit, tel que nous l'avons défini et tel aussi qu'on le considère dans le calcul infinitésimal, mais jamais sa limite, qui est zéro.

Est-ce à dire que cette limite n'existe pas ou que la conception algébrique de cette limite soit fausse ? Je me garderai bien de le soutenir ; il suffit, en effet, de recourir à l'idée de force, c'est-à-dire de mouvement, pour qu'on l'atteigne régulièrement et sûrement. Reprenons notre première proposition, et concevons qu'une droite, passant par le point donné, tourne autour de ce point, à partir de la position où elle est perpendiculaire sur MN. Elle passera successivement par toutes les positions, telles que OA, OB, OC, etc., des sécantes considérées dans la première proposition, jusqu'à celle dont l'écartement est indéfiniment grand et qui fait avec la droite donnée un angle indéfiniment petit, aussi petit que cet angle peut être,

sans cesser d'exister. Après quoi, le mouvement de rotation de la droite autour du point O pouvant se continuer, la droite mobile cessera de rencontrer la droite donnée ; cette circonstance arrivera nécessairement, quand la droite mobile aura tourné d'un angle droit dans l'hypothèse d'Euclide ; elle aura lieu un peu avant, dans l'hypothèse contraire.

Or, dans la position quelle qu'elle soit, où la droite mobile ne rencontre plus la droite donnée, elle ne peut pas s'écarter de la perpendiculaire d'une longueur indéfinie, si grande soit-elle, et son angle avec la droite donnée ne peut pas avoir une valeur indéfinie, si petite soit-elle, sans quoi la droite mobile se confondrait avec la sécante qui fait précisément ce petit angle avec la droite fixe. Il y a donc, de par la rotation, une position pour la droite dans laquelle son écartement de la perpendiculaire, après avoir été fini, puis indéfiniment grand, cesse de l'être, c'est-à-dire devient infini, et dans laquelle son angle avec la droite fixe, après avoir passé par une valeur finie, puis indéfiniment petite, cesse de l'être et devient nul ou zéro ; c'est la position que prend la droite mobile, dès qu'elle n'est plus sécante à la droite donnée.

On voit par là qu'à l'aide du mouvement nous

réalisons, dans les deux sens de la grandeur, les trois modes d'étendue dont une figure géométrique est susceptible, le fini, l'indéfini et l'infini ; tandis que nous n'en trouvons que deux, le fini et l'indéfini, par la construction géométrique.

Certes, nous ignorons *a priori* quel intervalle sépare de zéro l'élément microscopique d'une grandeur qui vient de naître ou qui va s'anéantir, cet intervalle est sans doute fort minime ; nous ignorons de même tout ce qui sépare une longueur indéfiniment grande de la longueur qu'elle prend quand elle s'étale dans l'infini, celui-là est peut-être immense. Mais nous sommes obligé par la raison de reconnaître que cet intervalle existe, à chacun des bouts de la grandeur, et que, pour le franchir, la règle et le compas ne suffisent pas, l'idée de force ou de mouvement est nécessaire.

Dans le cas qui nous occupe, le mouvement nous apprend qu'on peut mener par un point à une droite toutes les sécantes finies, puis indéfinies, que donne la construction géométrique, et enfin une ou plusieurs non-sécantes infinies, que ne donne pas la construction géométrique ; il nous apprend aussi que ces obliques font avec la droite un angle aigu décroissant indéfiniment, tant qu'elles restent sécantes, et que cet angle ne devient nul ou

égal à zéro qu'avec des obliques non-sécantes. Il n'y a donc pas de droite qui soit sécante ou tangente à l'infini à une droite donnée, de telle façon du moins que ces deux droites aient un point commun ; il n'y a, à proprement parler, que des sécantes et des non-sécantes. En outre, l'intervalle qui sépare de zéro la plus petite valeur de l'angle correspond précisément à celui qui sépare de l'infini la plus grande sécante, et il se traduit sur la droite donnée par un écartement s'étendant au delà de toute distance.

CHAPITRE III

LA PARALLÈLE NON EUCLIDIENNE

Quelle est la définition qu'on donne d'une parallèle dans l'hypothèse non euclidienne ?

Lobatschewsky définit ainsi la parallèle à une droite : « Toutes les droites qu'on peut mener par un point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, savoir : en droites *qui coupent* la droite donnée et en droites *qui ne la coupent pas*. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite *parallèle* à la droite donnée ». (V. Proposit. 16, page 3, *Études géométriques*, 1840, trad. Houël, Gauthier-Villars, édit.).

Cette définition nous laisse perplexe sur le point capital de savoir si cette limite commune aux deux

classes est la dernière des sécantes que nous avons pu obtenir ou la première des non-sécantes qui suivent; l'auteur ne le dit pas expressément, ni à cette page ni dans les suivantes, mais tout le reste donne à penser que la parallèle est pour lui plutôt une *non-sécante* qu'une sécante, puisqu'il admet qu'elle devient sécante dès qu'on la dévie un peu en la rapprochant de la droite donnée, et qu'il démontre plus loin que la parallèle à une droite s'approche indéfiniment de la droite, sans jamais la rencontrer.

La définition formulée par Bolyai, son contemporain, est plus claire. « Etant donné un point et une droite, si l'on fait mouvoir une droite quelconque autour du point, dit-il, il y aura un instant où la droite mobile commencera à ne plus couper la droite donnée ; c'est alors qu'on aura la *parallèle* ». (V. § 1, page 43, *la Science absolue de l'espace*, trad. Houël, Gauthier-Villars, édit.).

Evidemment, quand la droite mobile commence à ne plus couper la droite donnée, le point d'intersection n'existe plus sur la droite donnée, ni nulle part; la parallèle de Bolyai est donc, comme celle de Lobatschewsky, une *non-sécante*, et on l'obtient en écartant un peu de la droite donnée la dernière des sécantes par une légère déviation.

On peut déduire de là que le caractère propre de la parallèle non euclidienne, c'est d'être une non-sécante qui devient sécante dès qu'on la dévie en diminuant d'aussi peu qu'on veut son inclinaison vers la droite donnée, et qui reste non-sécante dès qu'on la dévie en augmentant cette inclinaison. (V. note 2, page 554, *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 5e édit., 1883, Gauthier-Villars).

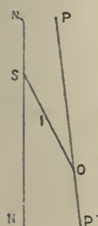
J'exprimerai ce résultat en deux mots : *la parallèle à une droite est la première des non-sécantes qu'on peut mener à cette droite.*

On démontre aisément, à la suite de cette définition, que toute droite parallèle à une autre conserve le *caractère du parallélisme* en tous ses points et que ce caractère est réciproque.

On démontre aussi que, *si deux parallèles étaient perpendiculaires à la même droite, la somme des angles d'un triangle quelconque serait égale à deux droits.* (Voir les ouvrages cités plus haut).

Enfin, on peut démontrer directement, et indépendamment de toute hypothèse, que, *si deux droites sont coupées par une troisième sous des angles alternes-internes égaux, ces deux droites sont non-sécantes et* Réciproquement.

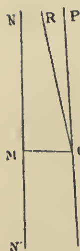
Démonstration. — 1° Soit NN′ et PP′ deux droites coupées par une troisième OS de telle sorte que l'angle POS soit égal à OSN′. Si l'on fait tourner, dans le plan de la figure, la partie NSOP autour du milieu I de la sécante jusqu'à ce que IO vienne tomber sur IS et IS sur IO, la partie NSOP s'appliquera exactement sur la partie P′OSN′, tout se trouvant alors égal et également disposé dans les deux parties. Il en résulte que, s'il y avait un point de rencontre des droites d'un côté de OS, il y en aurait un second de l'autre côté, et par ces deux points de rencontre passeraient une infinité de droites distinctes, ce qui est absurde ; donc, les deux droites, NN′ et PP′, ne peuvent pas se rencontrer. On en conclut que, si deux droites sont coupées par une troisième sous des angles alternes internes égaux, ces deux droites sont non-sécantes.



2° Réciproquement, *si deux droites sont non-sécantes, on peut en mener une troisième qui les coupe sous des angles alternes-internes égaux.*

Soit NN′ et PP′, deux droites non-sécantes, O un point quelconque de PP′ et OM la perpendi-

culaire abaissée du point O sur NN′. Si l'on fait tourner PP′ autour du point O vers MN, on pourra l'amener d'abord dans la position OR où elle est parallèle à NN′; dans cette position, elle fait avec MN un angle égal à zéro et avec OP un angle POR qui n'est pas nul, quelque petit qu'il soit. Ensuite, si l'on continue à faire tourner PP′ autour du point O, on pourra l'amener dans la position OM où elle est perpendiculaire sur NN′; dans cette position, elle fait avec MN un angle OMN′ qui est droit et avec OP un angle POM qui est aigu. Par conséquent, lorsque la droite mobile passe de la position OR à la position OM, l'angle qu'elle fait avec MN varie de zéro à un droit, et, dans le même intervalle, l'angle qu'elle fait avec OP varie de POR, qui est plus grand que zéro, à POM, qui est plus petit qu'un droit. Cela ne peut avoir lieu sans que la droite mobile, en vertu de la continuité, ait passé par une position intermédiaire où elle fait avec les droites données, NN′ et PP′, des angles alternes-internes égaux. On en conclut que, si deux droites sont non-sécantes, on peut en mener une troisième qui les coupe sous des angles alternes-internes égaux.



Ce dernier théorème fournit un procédé des plus réguliers et des plus précis pour caractériser la parallèle non euclidienne.

Imaginons qu'on ait mené par le point O une sécante quelconque, OA par exemple, puis OM perpendiculaire sur MN et OD perpendiculaire sur OM. L'angle A doit être plus petit que AOD, dans l'hypothèse non euclidienne ; car, si l'on avait A > AOD, la somme des angles du triangle OAM serait plus grande que deux droits, et, si l'on avait A = AOD, cette somme égalerait deux droits. Puisque l'angle A est plus petit que AOD, nous pouvons faire AOB égal à l'angle A, et la droite OB ainsi menée ne rencontrera pas la droite donnée MN ; d'après le théorème démontré plus haut, elle est non-sécante à la droite donnée.



Si l'on partage maintenant l'angle droit MOD en n parties égales et qu'on fasse tourner une droite autour du point O, à partir de la perpendiculaire OM, de manière à ce qu'elle décrive chaque fois un angle égal à $\frac{1^{D}}{n}$, il est clair que la droite mobile prendra ainsi successivement toutes les positions où elle est d'abord sécante, puis non-

sécante à la droite fixe, pourvu que l'on suppose n assez grand. En lui appliquant chaque fois la construction qu'on vient de faire avec OA, on obtiendra chaque fois une non-sécante correspondante, distincte de la précédente; on obtiendra donc, grâce à cette construction combinée avec le mouvement, toutes les non-sécantes possibles, depuis celle qui correspond à la sécante la plus rapprochée de OM jusqu'à celle qui correspond à la sécante la plus éloignée, puisqu'il n'y en a pas d'autres, d'après la Réciproque du théorème démontré plus haut.

La sécante la plus rapprochée de OM, c'est OM, et la non-sécante qui lui correspond est OD. De même, la sécante la plus éloignée de OM, c'est ON, et la non-sécante qui lui correspond est OP. Toutes les autres non-sécantes sont intermédiaires entre ces deux-là. Il n'y a qu'une seule non-sécante qu'on ne pourrait pas obtenir par ce procédé, c'est celle qui correspondrait à une sécante faisant avec la droite donnée un angle égal à zéro, attendu qu'une pareille sécante n'existe pas. Pour l'obtenir d'ailleurs, il faudrait poser $\frac{1}{n} = 0$ ou $n = \infty$; mais, si $\frac{1}{n} = 0$, la droite, qui est supposée mobile, tournerait chaque fois d'un angle égal à zéro, c'est-

à-dire ne tournerait pas. Si donc elle tourne, $\frac{1}{n}$ n'est pas nul, n n'est pas infini, et il faut que la dernière sécante soit distincte de la non-sécante qui lui correspond, ni plus ni moins qu'elle est distincte elle-même de l'avant-dernière sécante et qu'une sécante quelconque l'est de sa précédente.

La non-sécante qui correspond à la dernière des sécantes ne pouvant être autre chose que la parallèle non euclidienne, nous devrons considérer cette parallèle comme *une droite faisant avec la dernière sécante le même angle que celle-ci avec la droite donnée, si petit qu'il soit.*

En conséquence, le tableau qui représente, dans l'hypothèse non euclidienne, la seule distribution possible des droites qu'on peut mener d'un point à une droite donnée, est facile à imaginer.

Dans ce tableau, on ne trouve que des sécantes et des non-sécantes à la droite donnée. On y voit d'abord des sécantes quelconques telles que OA qui sont finies, puis une sécante extrême ON qui est indéfinie, puis une première non-sécante OP qui est la parallèle et qui est infinie, et enfin d'autres non-sécantes qui sont infinies comme la parallèle.

La sécante extrême et la parallèle étant des posi-

tions consécutives d'une droite mobile, l'angle $\frac{1}{n}$ qui les sépare est aussi petit que possible, mais il n'est pas nul, d'ou il résulte que, pour peu qu'on dévie cette parallèle d'un côté ou de l'autre, elle devient sécante ou reste non-sécante ; telle que nous la trouvons là, elle est bien la seule droite, issue du point O, qui jouisse de la propriété caractéristique de la parallèle non euclidienne.

Enfin, les points de chaque sécante vont en s'approchant indéfiniment de la droite donnée à mesure qu'il s'éloignent du point O, puisque chaque sécante finit par rencontrer la droite donnée. Il n'y a pas d'exception pour la sécante extrême, sous ce rapport. En est-il de même pour la parallèle, bien qu'elle ne rencontre pas la droite donnée? Il existe effectivement des droites analogues, qui s'approchent de certaines branches de courbes indéfiniment sans jamais les rencontrer, ce qu'on exprime en disant que la droite est *asymptote* à la courbe. Si la parallèle à une droite ne peut pas lui être sécante, ni tangente à l'infini, avec un point commun, n'est-elle point asymptote à la droite? Nous allons voir si la chose est possible, en étudiant les conséquences immédiates qui résultent de notre définition.

Considérons d'abord une sécante quelconque, OA par exemple, et OB la non-sécante correspondante. Abaissons du milieu I de la sécante une perpendiculaire sur la droite donnée, et soit IG cette perpendiculaire prolongée en IH; nous aurons formé ainsi deux triangles, AIG et OIH, qui sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun, savoir : OI = AI, par construction; HIO = AIG, comme opposés par le sommet, et IOH = GAI, puisque la non-sécante fait avec la sécante le même angle que celle-ci avec la droite donnée. Ces deux triangles étant égaux, l'angle IHO doit égaler IGA, et, comme ce dernier est droit, l'angle IHO est droit aussi. La non-sécante considérée et la droite donnée ont donc une perpendiculaire commune, qui passe par le milieu de la sécante correspondante.



Si l'on applique la construction et le raisonnement à la sécante extrême ON et à la non-sécante qui lui correspond, c'est-à-dire la parallèle OP, on trouvera de la même manière que la parallèle et la droite donnée ont une perpendiculaire commune qui passe par le milieu de la sécante extrême. Mais, si deux droites parallèles ont une perpendi-

culaire commune, la somme des angles d'un triangle quelconque est égale à deux droits, d'après l'un des théorèmes cités plus haut. La parallèle à une droite, telle qu'on l'a définie dans l'hypothèse non euclidienne, ne peut donc pas exister sans contradiction avec cette hypothèse.

La non-sécante à une droite ne peut pas exister davantage, dans l'hypothèse non euclidienne, puisque toute non-sécante devient parallèle à la droite, si on la fait tourner un peu autour d'un quelconque de ses points.

CHAPITRE IV

LA CONFUSION DE L'INDÉFINI ET DE L'INFINI

Il y a deux manières d'interpréter le résultat auquel on aboutit dans le chapitre précédent.

D'une part, on peut nier que la parallèle soit une droite distincte de la dernière sécante, et, confondant ces deux droites sous l'expression d'asymptote ou de sécante à l'infini, attribuer indistinctement à la parallèle, soit les propriétés d'une sécante indéfinie, soit celles d'une non-sécante infinie. La contradiction que nous avons rencontrée ci-dessus disparaîtra ainsi dans la confusion. On pourra dire, en effet, que la parallèle et la droite donnée ont bien une perpendiculaire commune, qui passe par le milieu de la dernière sécante, mais que, cette dernière étant infinie, si on

le veut, et la moitié d'une droite infinie étant elle-même infinie, la perpendiculaire commune se trouve transportée à l'infini ; là, elle ne gêne plus personne, et la géométrie non euclidienne peut s'étendre ainsi parallèlement à la géométrie euclidienne, en la contredisant sans cesse.

D'autre part, si l'on admet, comme nous l'avons établi, que la parallèle, qui est infinie, ne se confond pas avec la dernière des sécantes, qui est indéfinie, et que leur séparation est la seule condition qui soit compatible avec le mouvement qui les engendre l'une et l'autre, la contradiction signalée plus haut demeure inévitable. La perpendiculaire commune à la droite donnée et à la parallèle est située alors à une distance indéfiniment grande du point de départ, mais non pas à une distance infinie. Jusqu'à cette distance indéfinie, les deux systèmes peuvent encore se soutenir, chacun de son côté, quoique sans cesse opposés l'un à l'autre ; mais, à partir de là, le système d'Euclide s'impose et sans obstacle jusqu'à l'infini, tandis que celui de Lobatschewsky contredit son hypothèse et ne peut plus avancer qu'en se heurtant continuellement à la même contradiction.

Il est aisé de s'en rendre compte en examinant les propositions principales de cette géométrie.

Ainsi Lobatschewsky démontre (Prop. 23) qu'étant donné un angle aigu quelconque, on peut toujours trouver sur l'un des côtés un point qui soit à une distance du sommet telle que la perpendiculaire élevée en ce point et aux points suivants ne rencontre pas le second côté de l'angle. Soit MOP l'angle aigu, et MN la première perpendiculaire qui ne rencontre pas OP ; on voit immédiatement qu'on doit regarder OP comme parallèle à MN, et que, par conséquent, si l'on mène la dernière sécante ON, celle qui précède la parallèle, on retombe sur l'égalité des deux angles alternes-internes qui entraîne la contradiction avec l'hypothèse non euclidienne.



Il en est de même de sa Prop. 32 : un cercle dont le rayon va en croissant se change en une courbe-limite. Si l'on suppose que le centre N d'un cercle s'éloigne indéfiniment de l'extrémité M d'un rayon, le rayon devient indéfiniment grand ; et si, avec Lobatschewsky, on regarde ce rayon indéfini MN comme infini, on devra dire évidemment que le cercle s'est changé en une courbe-limite. Mais, si l'on considère qu'un point N, qui s'éloigne en restant sur une droite, ne peut pas être transporté à l'infini, il devient impossible d'atteindre ainsi

autre chose que l'indéfiniment grand, c'est-à-dire la dernière sécante ON ; par conséquent, lorsqu'on voudra passer à la limite, qui est l'infini, il faudra



faire tourner encore cette dernière sécante ON autour d'un de ses points, O par exemple, de manière à la rendre parallèle à MN ; on retrouve alors l'égalité des deux angles alternes-internes qui entraîne la contradiction avec l'hypothèse non euclidienne.

La confusion de l'indéfini et de l'infini est si profonde dans les idées de Lobatschewsky, qu'il conclut, à la fin de sa démonstration, qu'on peut appeler sa courbe-limite un cercle de rayon infiniment grand, bien qu'il n'ait parlé que de l'indéfini. Tous les néo-géomètres après lui font la même confusion : il n'y a pas de cercle de rayon infini, mais seulement des cercles de rayons indéfiniment grands.

Son Théorème 29 s'explique par une confusion semblable. Dans un triangle rectiligne, dit-il, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés se rencontrent toutes les trois au même point ou ne se rencontrent pas. Deux cas peuvent effectivement se présenter : ou bien, les sommets du triangle ne tombent pas tous les trois sur la cir-

conférence de son cercle-limite, et alors les trois perpendiculaires élevées au milieu des côtés se rencontreront en un même point, qui est le centre du cercle fini passant par les trois sommets du triangle; ou bien, les sommets du triangle tombent tous les trois sur la circonférence de son cercle-limite, et alors les trois perpendiculaires élevées au milieu des côtés se rencontreront au centre même du cercle-limite ; pour lui, c'est dire qu'elles se rencontrent à l'infini ou encore qu'elles ne se rencontrent pas du tout.

Tous les théorèmes de Lobatschewsky se trouvent placés dans le même cas, soit directement, soit par voie de conséquence. Il se sert quelquefois de l'algèbre, notamment pour établir sa trigonométrie; mais, comme l'algèbre ne dit jamais que ce qu'on lui fait dire, il ne paraît pas douteux que ses calculs doivent porter, ainsi que ses théorèmes, la trace de la confusion qu'il a faite de l'infini et de l'indéfini. Je laisse aux algébristes de profession la satisfaction de le vérifier, je ne traite la question qu'au point de vue géométrique.

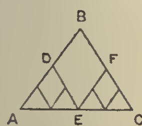
Au point de vue géométrique, l'œuvre de Lobatschewsky n'est pas le premier paradoxe qu'ait engendré dans les choses de l'esprit la confusion de l'infini et de l'indéfini. Tout le monde connaît la

fameuse antinomie de Kant : « Le continu, soit physique, soit mathématique, est divisible à l'infini, et pourtant les éléments du continu sont ou paraissent indivisibles ». On peut l'expliquer, comme la nouvelle géométrie, par la confusion perpétuelle de ces deux mots, infini et indéfini, dans l'esprit des discoureurs.

Il est clair, en effet, qu'en disant « le continu, soit physique, soit mathématique, est divisible à l'infini », on énonce une thèse tout à fait insignifiante, si l'on veut dire par là qu'en divisant une ligne en deux, puis en quatre, etc., on ne trouvera jamais aucune partie de la ligne qui ait une longueur nulle, puisqu'une telle partie n'existe pas. Le point n'est pas une partie de ligne, pas plus que la ligne n'est une partie de surface et la surface une partie de volume. Mais, si l'on veut dire qu'en divisant une ligne en deux, puis en quatre, etc., on n'arrivera jamais à tomber sur le premier élément de la longueur, bien que cet élément existe, on énonce une vérité mathématique incontestable, savoir que l'opération mentale, arithmétique ou géométrique, qui nous conduirait à cet élément, est interminable, autrement dit se prolongera indéfiniment. De même, en soutenant que « les éléments du continu sont ou paraissent

indivisibles », on formule une antithèse qui n'a pas de sens, si les éléments dont on parle sont nuls, comme ce que représente le zéro ; une ligne n'est pas une somme de points. Au contraire, si le zéro est remplacé par le premier élément de la longueur, on formule une proposition qui est d'accord avec tous les résultats connus du calcul infinitésimal. L'antinomie de Kant est donc un paradoxe, qui se résout très simplement avec l'indéfini et qui n'a aucun sens avec l'infini.

Tel est encore le paradoxe suivant. Si l'on joint le milieu de la base d'un triangle ABC, que je suppose équilatéral, au milieu de chacun des autres côtés, on forme une ligne brisée ADEFC qui est égale à la somme de ces deux côtés, AB + BC, c'est-à-dire au double de la base. En répétant la même construction sur les deux triangles partiels, ADE et EFC, on forme une seconde ligne brisée qui est encore égale à la somme des deux côtés, AB + BC, c'est-à-dire au double de la base. En continuant ainsi indéfiniment, on formera des lignes brisées de plus en plus surbaissées, qui ne cesseront pas d'égaler la somme des deux côtés, AB + BC, c'est-à-dire le double de la base. Or, si l'on étend la proposition à l'infini, on devra



dire que les éléments de la ligne brisée deviennent nuls à l'infini, que ce sont des points se confondant avec ceux de la base, et, par suite, que la ligne brisée est égale à la base. Comme d'ailleurs cette ligne brisée ne cesse pas d'égaler la somme des deux côtés, AB + BC, il faudra que la base du triangle soit égale à la somme des deux autres côtés, ce qui est faux. Au contraire, si l'on considère que les éléments de la ligne brisée ne deviennent jamais nuls, en vertu de la construction même, mais seulement des indéfiniment petits, ils ne cesseront pas, quelque petits qu'ils soient, de recouvrir deux fois la base, si loin qu'on pousse l'opération ; par conséquent, la base du triangle reste toujours la moitié de la ligne brisée et aussi de la somme des deux autres côtés du triangle, ce qui est vrai. Ce paradoxe se résout donc encore avec l'indéfini et conduit à l'absurde avec l'infini, quelle que soit d'ailleurs l'hypothèse qu'on ait faite sur la somme des angles d'un triangle.

En voici un autre exemple tiré des séries.

Considérons la série alternée des termes suivants :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$$

Si l'on suppose que le nombre des termes y est

indéfiniment grand, c'est-à-dire aussi grand qu'on voudra, on sait qu'en faisant les additions et soustractions indiquées par les signes, dans n'importe quel ordre, pourvu qu'on ne néglige aucun terme, on obtient toujours une valeur approchée de $l2$ et d'autant plus approchée qu'on s'arrête à un terme plus éloigné, de telle sorte qu'on peut dire que la valeur exacte de cette série indéfinie a pour limite $l2$.

Mais, si l'on suppose que le nombre des termes y est infiniment grand, la conclusion n'est plus la même. En effet, on peut remarquer qu'à partir d'un terme positif quelconque $\frac{1}{n}$, les n termes positifs qui suivent, savoir :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n+2(n-1)},$$

forment une somme plus grande que n fois le plus petit d'entre eux, lequel est ici le dernier; on a donc, quel que soit n :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n+2(n-1)}>\frac{n}{3n-2}.$$

Mais $\frac{n}{3n-2}$ est plus grand que $\frac{1}{3}$; donc, la la somme de n termes positifs, comptés à partir de $\frac{1}{n}$, est toujours plus grande que $\frac{1}{3}$.

D'après cela, prenons d'abord les quatre premiers termes, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, de la série ; puis, groupons les cinq termes positifs suivants : $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$, dont la somme a est plus grande que $\frac{1}{3}$; groupons de même les quinze termes positifs suivants : $\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \ldots\ldots + \frac{1}{43}$, dont la somme b est plus grande que $\frac{1}{3}$; puis, les quarante-cinq suivants, dont la somme c est plus grande que $\frac{1}{3}$; et ainsi de suite. La série, considérée avec un nombre infiniment grand de termes, équivaudra à celle-ci :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \left(a - \frac{1}{6}\right) + \left(b - \frac{1}{8}\right) + \left(c - \frac{1}{10}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

Or, il est évident que les parties : $a - \frac{1}{6}$, $b - \frac{1}{8}$, $c - \frac{1}{10}$, …… sont en nombre infini, et que chacune d'elles est plus grande que $\frac{1}{6}$, puisque a, b, c,… sont chacun plus grands que $\frac{1}{3}$; par conséquent, la série croît sans limite.

Les résultats qu'on obtient sont donc contradictoires, selon que la série est dotée d'un nombre indéfini ou d'un nombre infini de termes.

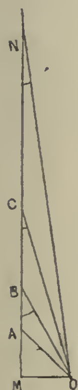
Les exemples pareils sont très nombreux, et, avec un peu d'attention, on y retrouve tout ce qu'il y a de spécieux dans la géométrie non euclidienne. En vérité, le géomètre a toujours le droit de passer de l'indéfini à sa limite, comme le demandait Leibnitz, et, depuis Descartes, on en use à chaque instant dans l'analyse. Mais Leibnitz, ni personne, n'a jamais demandé qu'il fût permis de confondre sous un seul et même terme deux idées si différentes et même si opposées : l'indéfini et l'infini. Ce qui paraîtra énorme, c'est qu'on ait pu les confondre dans la circonstance des parallèles, puisque l'intervalle qui les sépare correspond, dans cette circonstance, à un écartement de la droite donnée qui s'étend au delà de toute distance, et ce qui paraîtra curieux, c'est que l'hypothèse de leur confusion nous conduise à un vrai paralogisme, qui s'explique comme tous les paradoxes qu'on connaît.

S'il existe une dernière sécante, indéfiniment grande, menée d'un point à une droite, il existe

aussi un dernier angle, indéfiniment petit, correspondant à cette sécante absolument comme l'angle nul ou égal à zéro correspond à la parallèle. De même qu'au-dessus de la dernière sécante il n'y aurait que l'infini, de même au-dessous du dernier angle il n'y aurait que zéro; d'après quoi, l'échelle complète des grandeurs géométriques s'étendrait, depuis une certaine valeur indéfiniment petite α, jusqu'à une valeur indéfiniment grande ω, et il n'y en aurait pas d'autres. Le zéro et l'infini, qui sont dépourvus de toute limite, resteraient complètement en dehors de la quantité.

L'existence d'un dernier angle n'est pas plus conciliable avec l'hypothèse non euclidienne que l'existence d'une dernière sécante. Nous avons démontré en effet que, dans l'hypothèse d'Euclide comme dans l'hypothèse contraire, on peut mener, d'un point extérieur à une droite, une sécante faisant avec la droite un angle aussi petit qu'on le veut; or, pour chaque sécante qu'on aura menée, l'angle correspondant a une valeur différente, suivant l'hypothèse qu'on adopte : si la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, l'angle A est égal à $\frac{1}{2}$ et les sui-

vants B, C,.... N, sont respectivement égaux à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... $\frac{1}{2^n}$; si la somme en question est plus petite que deux droits, l'angle A est moindre que $\frac{1}{2}$, et les suivants B, C,... N, sont respectivement moindres que $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... $\frac{1}{2^n}$. Supposons qu'on ait mené, dans l'hypothèse d'Euclide, la sécante ON qui fait avec la droite le dernier ou le plus petit de tous les angles, et désignons la valeur de cet angle par α. Dans l'hypothèse contraire, le plus petit de tous les angles devra avoir une valeur moindre que α. Or, toute valeur moindre que α doit égaler zéro ; et nous avons vu qu'aucune sécante ne peut satisfaire à la condition de faire avec une droite un angle égal à zéro ; donc, la seule valeur possible pour cet angle, dans la seconde hypothèse, doit être α, comme dans la première. Les deux hypothèses, après avoir pu rester en désaccord sur la valeur de l'angle, depuis le point de départ de la construction, doivent s'accorder juste au moment où cet angle devient égal à α, dans l'hypothèse d'Euclide, et cet accord se réalise par l'évanouissement de l'hypothèse contraire. Il y a donc impos-



sibilité de concilier l'hypothèse non euclidienne avec l'existence d'un dernier angle, tout aussi bien qu'avec celle d'une dernière sécante, et cette impossibilité se manifeste exactement au même endroit. Remarquons d'ailleurs, que le même raisonnement n'a pas de prise, si l'on essaie de le retourner contre l'hypothèse euclidienne, en partant de l'autre.

La question posée entre les deux géométries revient donc à savoir, soit s'il y a une dernière sécante, distincte de la non-sécante qu'on nomme parallèle, soit s'il existe un dernier angle, n'en ayant pas de plus petit que lui, excepté zéro[1].

[1] En 1891, nous avons déjà démontré, en partant de l'existence d'un dernier angle, l'impossibilité de mener d'un point à une droite, soit la parallèle, soit une quelconque des non-sécantes qui forment tout le fonds de la géométrie non euclidienne. V. notre *Essai de géométrie rationnelle*, Annales de la Société nationale d'éducation, 37e livraison. Nous ajouterons que cette démonstration a surpris plus qu'elle n'a convaincu les géomètres qui l'ont lue.

CHAPITRE V

L'ATOME

Il est facile de s'assurer que l'élément infinitésimal, dont il vient d'être question, n'est pas le produit d'une simple spéculation métaphysique, mais qu'il existe géométriquement en vertu de la loi générale et positive qui engendre toutes les grandeurs, c'est-à-dire le mouvement.

Imaginons qu'une ligne droite soit sécante à une autre ligne, droite ou courbe, une circonférence de cercle, par exemple ; on sait qu'en faisant tourner la droite autour d'un de ses points extérieurs au cercle, ou en la transportant parallèlement à elle-même, c'est-à-dire perpendiculairement à une autre droite, on peut obtenir que les deux points d'intersection de cette sécante avec

la circonférence se rapprochent l'un de l'autre et finissent par se confondre en un seul. La sécante est dite alors tangente au cercle. Or, il est bien certain que, pendant le mouvement, chacun des arcs de cercle compris entre l'un des points d'intersection de la sécante et le point de contact de la tangente aura diminué de toute sa longueur primitive, jusqu'à devenir nul, et qu'une telle diminution n'a pu avoir lieu sans que l'arc, au moment de se réduire à zéro, ait passé par une dernière valeur, où il n'était pas encore nul, mais pourtant était plus petit que tous les arcs précédemment existants. C'est cette dernière valeur qui représente l'élément linéaire ou de longueur.

L'élément angulaire peut s'obtenir aussi de deux façons, soit par une rotation, soit par une translation. Considérons la figure formée par une droite, par la perpendiculaire abaissée sur cette droite d'un point donné et par la parallèle, euclidienne ou non, menée du même point à la droite. Dans cette figure, la parallèle et la droite ne forment pas d'angle, puisqu'elles ne se rencontrent pas, c'est ce qu'on exprime en disant que leur angle est nul. Mais, si l'on fait tourner la parallèle autour du point donné, en l'inclinant du côté de la droite, immédiatement leur angle se forme et grandit

avec le mouvement, jusqu'à devenir un angle droit. Pour que cet angle puisse exister plus ou moins, après avoir été nul, n'est-il pas nécessaire qu'il ait commencé d'exister, en prenant une première valeur, qu'il n'avait pas encore, et qui est plus petite que toutes celles qu'il prendra dans la suite? Cette valeur représente l'élément angulaire.

Au lieu d'un mouvement de rotation, si l'on imagine que la droite se transporte parallèlement à elle-même, dans l'hypothèse non euclidienne, le raisonnement et la conclusion sont les mêmes pour l'angle, soit qu'il disparaisse, soit qu'il prenne naissance par suite du mouvement.

D'une manière générale, il est inadmissible qu'une grandeur quelconque qui varie, en passant par toutes les valeurs possibles, depuis *l* jusqu'à *o*, n'en prenne pas une dernière, au-dessous de laquelle il n'y en ait point de plus petite, si ce n'est zéro. Cette valeur minuscule que prend toute grandeur à sa naissance ou à sa disparition, c'est l'élément α de la quantité.

Il n'est pas facile d'isoler par la pensée cet élément α des valeurs qui l'avoisinent ; l'imagination se perd à vouloir suivre une grandeur fuyante qui lui échappe par sa petitesse bien avant sa dispari-

tion, et l'on en vient immanquablement à se faire l'objection suivante : puisque cette grandeur variable, dont il est question, est susceptible de diminuer indéfiniment, nul ne saurait lui assigner une valeur qui n'en est pas une plus petite, et il en sera ainsi jusqu'à zéro, qui est seul moindre que toutes les quantités. Cette objection est illusoire. La raison nous certifie d'abord que le mouvement nous fera rencontrer α avant d'arriver à zéro, d'après la définition même de chacun de ces termes; α est donc, comme tout ce qui existe, plus grand que zéro. D'autre part, si votre grandeur variable peut diminuer indéfiniment, α est lui-même plus petit que tout ce qu'on peut imaginer ; il suffit donc de concevoir qu'il est plus petit que toutes les valeurs que pourra prendre la variable, pour qu'il n'y en ait pas de plus petite que lui : c'est tout ce qui le caractérise. L'objection faite plus haut revient simplement à assimiler, *a priori*, α avec o; or, cette assimilation est illégitime, puisque zéro ne représente aucune quantité, et que α en est une ; de plus, elle a le grave inconvénient, dans le cas des parallèles, d'engendrer le paradoxe que nous avons rencontré. La seule idée qu'on puisse se faire de cet élément α est celle de la *différentielle* d'une variable indépendante, telle

qu'on la définit dans l'analyse; dans la géométrie, c'est celle d'un *atome*.

L'idée d'un *atome* n'est pas pour étonner le physicien, chimiste ou naturaliste, qui admet volontiers la cellule, la molécule ou la nébuleuse comme un point de départ à la fois commode et fécond dans l'explication de la science, mais elle surprend quelques mathématiciens. Cependant, il serait étrange, au point de vue de la raison, d'accorder un atome aux formes matérielles que manipule le physicien et de le refuser aux figures que conçoit le géomètre; car, celles-ci ne sont autres que celles-là idéalisées, et la perfection dans la jouissance d'un attribut ne consiste pas, que nous sachions, à en être dépouillé, mais bien à le posséder dans sa plénitude. Si donc on admet l'atome dans la matière, on devra l'admettre aussi dans la géométrie, qui est de la matière perfectionnée ; de plus, il faudra que l'atome géométrique ait toutes les propriétés de l'atome physique, et qu'il les ait toutes au plus haut degré. Si le physicien s'arrête nécessairement à un atome en quelque sorte grossier et provisoire, parce qu'il a toujours à craindre de le voir un jour se transformer en atome plus petit, le géomètre, lui, n'a rien à redouter du

temps, ni des efforts du savant ; en un clin d'œil, avec un mouvement imperceptible d'une ligne, il peut tirer du néant son atome, toujours identique à lui-même, en engendrant une grandeur, ou bien l'atteindre, en réduisant cette grandeur à zéro. L'atome géométrique est, de tous les atomes, le plus existant, le plus fixe, le plus simple ; c'est l'idéal des atomes. Voilà pourquoi nous verrons que toute la science repose sur lui.

Lorsqu'il s'agit d'une longueur, l'atome n'est pas un point, attendu que le point n'a pas de dimension ; mais, le point mis en mouvement décrit une ligne qui a une dimension. Le point mathématique, considéré en soi et condamné à l'immobilité, n'est autre chose que le néant ; au contraire, dès qu'on lui applique une force, l'effet produit est une longueur, qui débute par un atome et qui se développe suivant une ligne. Si l'atome linéaire n'est pas un point, c'est un point plus une force, c'est-à-dire une longueur.

A ce titre, l'atome peut augmenter et diminuer aussi bien que toute autre longueur ; mais il le fera d'une manière particulièrement remarquable : s'il augmente, il ne peut que doubler, tripler, etc., et donner toutes les longueurs en se multipliant ; s'il diminue, ce ne sera que pour disparaître en

devenant zéro. L'atome géométrique n'a que des multiples, il n'a point de sous-multiples.

Une ligne quelconque, soumise à un mouvement de translation ou de rotation, engendre une surface ; en passant, cette ligne nous donnera l'atome superficiel qui lui correspond. La génération d'un volume, en partant d'une surface qu'on met en mouvement, nous donnera de même l'atome solide. Ces deux dernières sortes d'atome jouissent, d'ailleurs, des mêmes propriétés que l'atome linéaire, chacun dans son genre ; le superficiel, en tant que surface, et le solide, en tant que volume, n'ont rien qui soit plus petit qu'eux. L'atome géométrique se trouve ainsi défini, pour toute espèce de grandeurs, comme étant la plus petite des grandeurs de même espèce.

L'angle, en tant que surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un de ses points, a aussi son atome, qui est distinct de zéro et qui est le plus petit de tous les angles. Il est certain que, si deux angles varient en décroissant librement jusqu'à zéro, leurs valeurs atomiques doivent être égales ; en effet, si ces valeurs étaient inégales, l'une ou l'autre des deux ne représenterait pas le plus petit de tous les angles. Cette remarque explique pourquoi nous avons trouvé plus haut

que l'atome non euclidien doit égaler l'atome euclidien, avant de se réduire librement à zéro.

Il n'en sera pas de même pour deux angles décroissants dont les variations ont entre elles une dépendance, le rapport de leurs valeurs atomiques peut être quelconque. Cependant, si les deux angles restent constamment égaux, dans toutes leurs variations correspondantes, on peut encore affirmer que leurs valeurs atomiques sont égales. Tel est le cas qui s'est présenté, et qui nous a servi dans la définition des non-sécantes et de la parallèle non euclidiennes : toute non-sécante devant faire avec une sécante le même angle que celle-ci avec la droite donnée, nous en avons conclu que la parallèle devait faire avec la dernière sécante l'angle atome que celle-ci fait avec la droite donnée; ce qui a entraîné pour l'hypothèse non euclidienne une contradiction avec elle-même.

Nous trouverons plus loin des valeurs atomiques, dépendant l'une de l'autre, dans le chapitre des applications de l'atome à la dérivée d'une fonction; pour le moment, la définition de l'atome d'une grandeur, comme élément rationnel et distinct de zéro, nous suffit.

CHAPITRE VI

L'ATOME ET LE ZÉRO

Au fond, la doctrine de l'atome n'est pas une nouveauté dans la géométrie, et il serait puéril de la rejeter parce qu'on ne la connaît plus ou parce qu'elle joue un rôle capital seulement dans la définition des parallèles. Il s'en faut que nous l'ayons inventée pour en faire une application raisonnée à la question; cette doctrine est aussi vieille que le monde.

Le principe de la théorie atomique est exprimé sans équivoque dans tous les ouvrages qui nous restent de l'antiquité et du moyen âge, dans Archimède, Euclide, et leurs nombreux commentateurs. Les deux infinis y sont toujours laissés de côté, comme étant en dehors de la quantité. La

même doctrine est affirmée très nettement dans le traité *De l'esprit géométrique* de Pascal, lorsqu'il écrit : « c'est-à-dire en un mot que, quelque mouvement, quelque espace, quelque temps qu'il soit, il y en a toujours un plus grand et un moindre, en sorte qu'ils se soutiennent tous entre le néant et l'infini, étant toujours infiniment éloignés de ces extrêmes ». Il ne serait pas difficile de citer beaucoup d'autres phrases, tout aussi explicites, sous la plume de Leibnitz.

C'est seulement depuis l'invention de Descartes, c'est-à-dire depuis l'application régulière de l'algèbre à la géométrie, que ce principe s'est obscurci peu à peu sous l'emploi des formules algébriques et que l'assimilation de l'atome à zéro est devenue plus fréquente. Il y a eu d'abord ce fait important que, dans le calcul infinitésimal, ce qu'on appelle un infiniment petit ne l'est pas au sens propre du mot : c'est *indéfiniment* petit qu'on aurait dû dire, au lieu d'*infiniment* petit. Personne ne s'y trompe, il est vrai, et on l'entend toujours ainsi ; mais, on n'en a pas moins pris l'habitude de franchir l'intervalle de l'indéfini à l'infini à chaque instant, le zéro se présente au bout de la plume en même temps que α, et le calculateur de profession s'est tellement exercé à

regarder le zéro comme la plus petite des quantités — bien qu'il n'en soit pas une et que cette qualité appartienne exclusivement à l'atome — qu'il fait la confusion sans s'en apercevoir.

Aujourd'hui, cette confusion n'est pas simplement un fait accidentel, quoiqu'on ne l'ait signalée ici que dans la géométrie non euclidienne. elle est de tous les jours et de tous les pays, de plus en plus acceptée à mesure que l'analyse fait plus de progrès. Si elle occasionne çà et là quelques obscurités, anomalies ou paradoxes, on les laisse volontiers de côté pour s'attacher à ce qui reste vrai quand même, et le champ des découvertes modernes n'en est pas diminué de beaucoup.

Mais voilà que cette confusion amène les Euclidiens en face d'une nouvelle école de géomètres. où l'on débute par ces mots : « Vous admettez que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits : pour nous, il nous plaît d'admettre que cette somme est un peu différente, et nous vous mettons au défi de prouver que notre hypothèse a d'autre tort que celui de vous contredire. Voyez les mémoires, les thèses doctorales, les volumes, qu'elle nous a déjà valus ; elle est pour le moins aussi présentable et aussi féconde que la vôtre ». Cette déclaration n'est certes pas né-

gligeable, et il importe que les partisans d'Euclide se rendent un compte exact de la situation qui leur est faite ; la voici en quelques mots.

Dès que vous admettez, avec Euclide, que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, il vous faut aussi admettre avec lui que le zéro est distinct de l'atome ; car, si ces deux termes restent confondus dans votre esprit, vous devez accepter logiquement que dans tous les triangles cette somme est un peu différente de deux droits. Vous devez accepter encore, comme conséquence, que le théorème de Pythagore, la théorie de la similitude, celle de l'aire et du volume des corps ronds sont des résultats faux, que vos belles applications à la physique, à la mécanique, à l'astronomie, et toute votre analyse euclidienne n'offrent plus aucune certitude.

Même en définissant la vérité scientifique comme l'hypothèse la plus simple qui explique tous les faits, vous n'êtes pas sûrs que cette vérité soit de votre côté plutôt que du côté opposé, car il n'est guère moins simple de supposer la somme des angles d'un triangle un peu différente de deux droits que de la supposer égale à deux droits. Peut-être vous contenterez-vous d'accepter les résultats que vous avez acquis jusqu'à présent

comme des vérités purement relatives à votre hypothèse et n'ayant rien d'absolu ; votre géométrie cesserait ainsi d'être le modèle des sciences exactes. Mais les prétentions des non-euclidiens ne vont pas au delà : en attendant, disent-ils, qu'ils aient trouvé un milieu où leurs spéculations puissent se réaliser et un principe général qui comprenne tous les systèmes particuliers de géométrie, ils regardent leurs développements propres comme vrais par rapport à leur hypothèse, et, sous ce rapport, leurs droits sont égaux aux vôtres.

Cependant, vous avez déjà quelque chose qu'ils n'ont pas, c'est le milieu dans lequel la géométrie d'Euclide est toute réalisable ; ce milieu, c'est l'espace rationnel, autrement dit l'espace où nous vivons, débarrassé par la conception de toutes ses imperfections et accidents. Quant au principe, qui paraît vous manquer et que les autres cherchent, il est simplement oublié ou méconnu par tous : c'est le principe de la distinction de l'indéfini et de l'infini, ou, ce qui est la même chose, de l'atome et du zéro. Avec ce principe, on explique tous les faits relatifs aux deux systèmes, et, par cela même qu'on marque l'endroit précis où la nouvelle géométrie est obligée de céder le pas

à l'ancienne, sous peine d'absurdité, on rend à la géométrie d'Euclide tous ses titres de science exacte.

Au surplus, les géomètres qui, en dehors de la géométrie pure, ont reconnu la nécessité de distinguer l'infini de l'indéfini, ne sont pas rares. Lagrange, Abel, Poisson, Cauchy, ont toujours regardé les fonctions comme de simples expressions de calcul, dont le développement en séries renferme le principe même de leur théorie. Pour eux aussi, toutes les grandeurs mesurables et, par suite, calculables se trouvent comprises entre l'indéfiniment petit et l'indéfiniment grand, l'infini et zéro restant en dehors de la quantité.

Mais ce qu'il y a de plus étonnant, c'est que le principe de la distinction de l'indéfini et de l'infini ressort formellement de la correspondance de Gauss, correspondance qui est le seul témoignage qu'on ait pu trouver dans les œuvres du célèbre Hanovrien en faveur de l'hypothèse non euclidienne. Répondant à une lettre de Schumacker, qui lui avait communiqué une démonstration de la somme des angles d'un triangle, presque semblable à celle de Platon, Gauss commence par le blâmer de l'usage qu'il fait d'une grandeur infinie en la traitant comme une grandeur finie et déter-

minée, ce qui n'est jamais permis en mathématiques ; et il termine en disant que le langage figuré de la théorie de l'infini ne présente point de contradiction, si l'homme, être fini, ne s'aventure pas à vouloir traiter quelque chose d'infini comme un objet susceptible d'être embrassé par ses forces habituelles de compréhension.

C'est précisément le reproche que nous adressons aux néo-géomètres, quand nous disons qu'ils n'ont pas distingué, dans leurs raisonnements, α de o, ni ω de ∞. Sans doute, on peut sans inconvénient, dans la plupart des cas, passer de α à o : il suffit d'en citer comme exemple le problème général de la tangente à une courbe, qui est fondamental dans le calcul différentiel, et la question de la mesure du cercle, qui est typique dans la théorie élémentaire des limites. La théorie des limites est applicable, toutes les fois que la variable peut s'approcher d'aussi peu qu'on le veut de sa limite. Mais est-ce le cas des parallèles ? Tandis que l'angle zéro correspond à une non-sécante, l'angle α correspond à une sécante, et l'on ne peut aller de α à o sans que ce passage entraîne celui de ω à ∞, c'est-à-dire celui d'une sécante à une non-sécante ; or, personne n'osera prétendre que l'accroissement que prend une sécante quelconque

pour devenir non-sécante, soit aussi petit qu'on le veut, puisqu'il demeure sans limite, quoi qu'on fasse. C'est d'ailleurs dans cet intervalle de la dernière sécante à la non-sécante que nous avons vu se produire la contradiction de l'hypothèse non euclidienne avec elle-même.

Qu'on nous permette une dernière remarque. Le seul moyen d'échapper à la contradiction était évidemment de supprimer cet intervalle de α à o et de ω à ∞, en confondant l'atome avec zéro et l'indéfini avec l'infini. Les néo-géomètres ont fait la confusion ; et, comme il y a deux manières de la faire, il est arrivé qu'ils ont rencontré deux systèmes de géométrie non euclidienne, prenant leur source au même endroit. Qu'on y fasse attention, et l'on reconnaîtra que ceux qui supposent la somme des angles d'un triangle un peu plus grande que deux droits, ont supprimé l'intervalle en s'arrêtant, non pas à zéro, mais à l'atome ; l'infini, dans leur système, est borné à l'indéfini : c'est le système que nous avons écarté dès le début, comme étant en opposition avec une proposition démontrée par Legendre. Les autres, ceux qui supposent la somme des angles d'un triangle un peu plus petite que deux droits, ont supprimé l'intervalle en niant les propriétés de

l'atome, et en les accordant toutes à zéro ; ils donnent ainsi à l'infini tous les attributs de l'indéfini. L'indéfini n'étant, en définitive, qu'une variété du fini, ils traitent l'infini comme une quantité finie et déterminée, ce que Gauss reprochait à Schumacker.

En réalité, l'atome et le zéro sont deux états consécutifs d'une grandeur continue, tout à fait distincts l'un de l'autre, et il n'y a pas plus de motif pour confondre ces deux états particuliers qu'il n'y en a pour confondre deux états consécutifs quelconques de la même grandeur. Soutenir qu'on voit très bien que le zéro existe au bout d'une grandeur décroissant indéfiniment, mais qu'on ne voit pas qu'il en soit de même de l'atome, c'est dire tout simplement qu'on voit bien que ce qui n'existe pas existe, et, par contre, que ce qui existe n'existe pas. C'est évidemment là une prétention doublement paradoxale, qui a pour cause unique la difficulté de se figurer avec l'imagination la valeur atomique d'une grandeur. Mais, si l'on imagine difficilement un atome, on ne peut s'empêcher de le concevoir ; la raison nous l'impose et nous laisse voir, après quelque réflexion, qu'il est beaucoup plus facile de concevoir le zéro

à la suite de l'atome, que de concevoir le zéro sans l'atome ou confondu avec l'atome, attendu que la première de ces conceptions est logique et que la seconde ne l'est pas.

Je l'ai déjà dit, ce qui explique jusqu'à un certain point cet illogisme, sans l'excuser, c'est que l'atome α est plus petit que tout ce qu'on peut imaginer de plus petit, et qu'il est permis dans l'usage d'assimiler une telle quantité à zéro. Mais, la différence de α à o, qui est négligeable dans l'usage, n'est pas négligeable en théorie. Théoriquement, α étant indéfiniment petit, son inverse $\frac{1}{\alpha}$ est indéfiniment grand, tandis que, o étant nul, son inverse $\frac{1}{0}$ c'est l'infini ; la différence entre l'infini et l'indéfini est donc géométriquement infinie. Elle l'est aussi algébriquement, si l'on traite zéro comme une quantité. On comprend, d'après cela, qu'une confusion ayant pour conséquence l'assimilation de deux éléments qui diffèrent infiniment l'un de l'autre ait pû devenir une source abondante d'erreurs, et que ces erreurs demeurent sans réplique, tant qu'on n'a pas recours à la distinction de l'atome et du zéro.

CHAPITRE VII

L'ATOME DISTINCT DE ZÉRO

L'atome géométrique, tel que nous l'avons défini, conduit à une théorie absolue des parallèles, qui est visiblement inconciliable avec l'hypothèse non euclidienne.

Commençons par rappeler que deux droites sont dites *parallèles*, si elles ne se rencontrent pas, quelque loin qu'on les suppose prolongées dans les deux sens, et, en outre, si elles se rencontrent pour peu qu'on fasse tourner l'une d'elles autour d'un quelconque de ses points.

Cette définition du parallélisme de deux droites est la seule qui réponde d'une manière claire et précise à toutes les exigences des géomètres, même des non euclidiens. Quant aux mots « pour peu

qu'on fasse tourner l'une d'elles autour d'un quelconque de ses points », il ne s'agit pas ici de faire tourner la droite d'un angle nul, ce serait évidemment illusoire, mais bien de la faire tourner d'un angle aussi petit que l'on voudra, pourvu qu'il existe, autrement dit de l'*atome* d'angle ; c'est ainsi que nous l'entendons, et nul ne saurait l'entendre autrement.

La première question qui se pose est de savoir s'il existe des droites satisfaisant aux conditions exprimées dans la définition, c'est-à-dire des droites parallèles. Il est facile d'y répondre au moyen des propositions suivantes.

Proposition 1.

THÉORÈME. — *Deux droites qui font avec une troisième des angles alternes-internes égaux ne peuvent pas se rencontrer.*

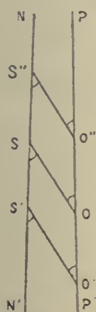
Cette proposition est énoncée et démontrée plus haut (Chapitre III).

Elle est vraie aussi pour deux droites qui feraient avec une troisième des angles correspondants égaux ou qui seraient l'une et l'autre perpendiculaires à une troisième.

Proposition 2.

Théorème. — *Si l'atome est distinct de zéro, deux droites qui font avec une troisième des angles alternes-internes égaux chacun à l'atome se rencontrent, pour peu qu'on fasse tourner l'une d'elles autour d'un quelconque de ses points.*

Soit NN′ et PP′ deux droites faisant avec OS les angles POS et OSN′ égaux chacun à l'atome. Si l'on fait tourner la droite PP′ aussi peu qu'on voudra autour du point O, la proposition est évidente, puisque l'angle SOP est l'atome d'angle, par hypothèse, et que OS est sécante à NN′. La proposition n'est pas moins évidente, si l'on fait tourner la droite NN′ aussi peu qu'on voudra autour du point S, et pour la même raison.



Considérons maintenant un autre point de PP′, O′ par exemple : si l'on mène par ce point la droite O′S′ faisant avec PP′ l'angle atome PO′S′, cette droite O′S′ doit couper NN′ ; car, les deux angles SOP et S′O′P étant égaux, elle ne peut pas rencontrer OS (Prop. 1) ; d'ailleurs, elle ne peut pas rencontrer deux fois O′O, ni deux fois la perpen-

diculaire O′N″ qu'on abaisserait du point O′ sur NN′ ; donc elle doit couper NN′, sur la partie SN″.

De plus, l'angle N′S′O′ doit égaler l'atome d'angle ; en effet, cet angle N′S′O′ ne saurait être plus petit que l'atome, puisqu'il n'y en a pas de plus petit, et il ne saurait être plus grand, sans quoi on pourrait le diminuer un peu en faisant tourner vers OS la sécante O′S′ autour du point O′, et, dans la nouvelle position qu'elle prendrait, la sécante O′S′ ferait avec PP′ un angle plus petit que l'atome, ce qui est impossible. Donc, la droite O′S′ faisant avec PP′ l'angle atome doit rencontrer NN′ et faire avec NN′ le même angle atome.

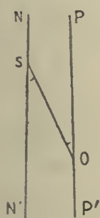
Il est clair que, dans l'autre partie de la figure, toute droite S″O″ faisant avec NN′ l'angle atome devra, pour une raison analogue, rencontrer PP′ et faire avec PP′ le même angle atome.

On en conclut que, si l'on fait tourner l'une des deux droites considérées autour d'un quelconque de ses points du plus petit angle possible, c'est-à-dire de l'angle atome, les deux droites se rencontrent.

Proposition 3.

Théorème. — *Si l'atome est distinct de zéro, on peut mener, par un point donné hors d'une droite, une parallèle à cette droite.*

Soit O le point et NN′ la droite. On peut mener par le point O une sécante OS faisant avec NN′ un angle aussi petit que possible, c'est-à-dire égal à l'atome, puis, par le même point O, on peut mener une droite faisant avec la sécante OS le même angle atome POS. La droite PP′ ainsi menée est parallèle à la droite donnée NN′ : en effet, ces deux droites ne peuvent pas se rencontrer, quelque loin qu'on les suppose prolongées (Prop. 1), et, en outre, elles se rencontrent pour peu qu'on fasse tourner l'une d'elles autour d'un quelconque de ses points (Prop. 2).



Il y a donc des droites satisfaisant aux conditions de parallélisme exprimées dans la définition, et, comme on le voit, elles sont telles que toute droite faisant avec l'une d'elles le plus petit angle possible, c'est-à-dire l'angle atome, est sécante à l'autre et fait avec l'autre le même angle atome.

Ce caractère suffit pour qu'on puisse en tirer absolument, c'est-à-dire indépendamment de toute hypothèse sur la somme des angles d'un triangle, toutes les propriétés des parallèles. En voici quelques exemples.

Proposition 4.

Postulatum des programmes officiels. — *Par un point donné hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite.*

Soit O le point donné et NN′ la droite (V. figure précédente). Menons par le point O, comme on vient de le faire, une droite PP′ qui soit parallèle à NN′, et supposons qu'on ait pu mener, par le même point, une seconde parallèle à NN′ ; cette seconde parallèle tombera d'un côté ou de l'autre de la première, et elle fera avec la première, au point O, un angle au moins égal à l'atome, puisqu'il n'y en a pas de plus petit. Or, une pareille droite est, d'après ce qui précède, sécante à NN′ ; donc, elle ne lui est pas parallèle. En d'autres termes, on ne peut mener, par un point donné hors d'une droite, qu'une seule parallèle à cette droite.

Proposition 5.

Théorème. — *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.*

Soit MN et OD deux droites perpendiculaires à OM. Menons par le point O la droite OP parallèle à MN ; si la perpendiculaire OD tombait d'un côté ou de l'autre de cette parallèle, elle ferait avec elle un angle au moins égal à l'atome, puisqu'il n'y en a pas de plus petit ; par suite, elle devrait être sécante à MN.



Mais, on sait que deux droites perpendiculaires à une troisième ne peuvent pas se rencontrer (Prop. 1) ; donc, la perpendiculaire OD ne peut tomber ni d'un côté ni de l'autre de la parallèle OP ; par conséquent, elle doit se confondre avec cette parallèle. Autrement dit, deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.

Scolie. — *Deux droites qui ne se rencontrent pas sont parallèles.*

Proposition 6.

Postulatum d'Euclide. — *Si deux droites sont*

l'une perpendiculaire et l'autre oblique à une troisième, les deux droites suffisamment prolongées doivent se rencontrer.

Soit MN et OP deux droites dont l'une est perpendiculaire et l'autre oblique à OM (V. figure précédente). Élevons, par le point O, une perpendiculaire sur OM; cette perpendiculaire OD doit être parallèle à MN, d'après le théorème précédent. Il en résulte que l'oblique OF, qui fait avec la parallèle un angle au moins égal à l'atome, doit être sécante à MN. Donc, si deux droites sont l'une perpendiculaire et l'autre oblique à une troisième, les deux droites suffisamment prolongées doivent se rencontrer.

On démontrera par un raisonnement analogue les propositions suivantes :

Théorème. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Théorème. — *Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*

Théorème. — *Si deux droites parallèles sont rencontrées par une sécante quelconque, les angles alternes-internes ou correspondants sont égaux.*

Sans aller plus loin, on voit clairement que, si l'atome est distinct de zéro, les propriétés euclidiennes des parallèles sont absolument vraies et les non euclidiennes absolument fausses.

CHAPITRE VIII

L'ATOME CONFONDU AVEC ZÉRO

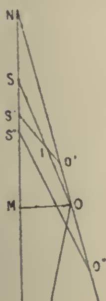
Pour compléter ce qui précède, faisons voir directement et indépendamment de toute hypothèse sur la somme des angles d'un triangle, que, si l'atome est confondu avec zéro, c'est la théorie non euclidienne des parallèles qui se vérifie et celle d'Euclide qui devient absurde. Il suffit de démontrer les propositions qui suivent.

Proposition 1.

Théorème. — *Si l'atome est confondu avec zéro, on peut mener, par un point extérieur à une droite donnée, deux parallèles à cette droite.*

Soit O le point et MN la droite donnée. Si l'on

mène par le point O une oblique ON faisant avec la droite un angle aussi petit que possible, c'est-à-dire l'angle atome, l'oblique ainsi menée ne se distingue pas de celle qui fait avec MN un angle nul, puisque l'atome ne se distingue pas de zéro, par hypothèse. De plus, l'indéfini se confondant avec l'infini, on peut dire que l'oblique rencontre MN à l'infini, ou, ce qui est la même chose, qu'elle ne rencontre pas MN; d'ailleurs, elle jouit de cette propriété que, pour peu qu'on la fasse tourner vers MN autour d'un quelconque de ses points, elle devient sécante à MN ; en effet, cette propriété est évidente pour le point O, puisque la droite ON fait avec MN le plus petit angle possible, lequel est nul.



Considérons un autre point de la droite, O′ par exemple, et supposons qu'en tournant autour du point O′, si peu que ce soit, la droite O′N ait pris la position O′S′. Si l'on prend sur O′S′, à partir du point O′ une longueur O′I aussi petite qu'on voudra et qu'on mène OI, la droite OIS ainsi menée est sécante à MN, d'après ce qui précède. Mais la droite O′S′, rencontrant OIS au point I, ne peut pas rencontrer deux fois la même droite, ni deux

fois la perpendiculaire O'M' qu'on abaisserait du point O' sur MN ; donc elle doit couper MN, sur la partie SM'.

Considérons maintenant un autre point O'', et supposons qu'en tournant autour du point O'', la droite O''N ait pris la position O''S''. Si l'on mène, par le point O, la droite OS de telle sorte que l'angle NOS soit égal à NO''S'', la droite ainsi menée OS est sécante à MN, d'après ce qui précède. Mais la droite O''S'' ne peut pas rencontrer OS, puisque les deux angles correspondants, NOS et NO''S'', sont égaux ; d'ailleurs, elle ne peut pas rencontrer deux fois O''O, ni deux fois la perpendiculaire O''M'' qu'on abaisserait du point O'' sur MN ; donc elle doit couper MN, sur la partie SM''. On en conclut que, pour peu qu'on la fasse tourner vers MN autour d'un quelconque de ses points, l'oblique ON devient sécante à MN. Cette oblique OM est donc bien parallèle à la droite donnée.

Il est clair que, s'il y a une parallèle d'un côté de la perpendiculaire OM, il y en a une seconde de l'autre côté de cette perpendiculaire et symétrique de la première. Donc, on peut mener, par un point extérieur à une droite donnée, deux parallèles à cette droite.

L'angle MON est dit *l'angle de parallélisme* correspondant au point O. Cet angle est aigu.

Proposition 2.

Théorème. — *Si l'atome est confondu avec zéro, on peut mener, par un point extérieur à une droite donnée, une infinité de droites qui ne rencontrent pas la droite donnée et ne lui sont pas parallèles.*

Soit O le point et MN la droite, ON l'une des deux parallèles qu'on peut mener du point O à la droite MN, et OD la perpendiculaire élevée sur OM. Menons, par le point O, une droite quelconque dans l'angle NOD ; la droite ainsi menée OB fait avec OM un angle qui est aigu et plus grand que MON ; or, la parallèle ON rencontre MN à l'infini ; donc la droite OB ne peut pas rencontrer MN, ni lui devenir sécante par suite d'une déviation aussi petite que possible. Il en est de même évidemment pour toutes les droites qui tombent dans l'angle NOD ; par conséquent, on peut mener, par un point extérieur à une droite donnée, une infinité de droites



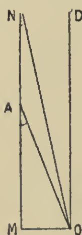
qui ne rencontrent pas la droite donnée et qui ne lui sont pas parallèles.

Ces droites qui ne rencontrent pas la droite donnée et qui pourtant ne lui sont pas parallèles, parmi lesquelles figure OD, forment le *faisceau des* droites *non-sécantes* à la droite donnée.

Proposition 3.

Théorème. — *Si l'atome est confondu avec zéro, la somme des trois angles de tout triangle est moindre que deux droits.*

Soit O un point extérieur à une droite MN, OA une sécante à la droite et ON l'une des deux parallèles qu'on peut mener du point à la même droite. Si l'on abaisse la perpendiculaire OM et si l'on élève OD perpendiculaire sur OM, on aura formé un triangle rectangle AOM, dans lequel l'angle A est plus petit que AOD. En effet, si l'angle A était plus grand que AOD ou égal à AOD, cette relation devrait subsister quelle que soit la position de la sécante OA, et notamment lorsqu'elle vient se confondre avec la parallèle ON ; or, on sait que, dans cette position, l'angle qu'elle fait avec ON



est égal à zéro, tandis que celui qu'elle fait avec OD n'est pas nul. Donc l'angle A n'est pas plus grand que AOD, ni égal à AOD. On en conclut que l'angle A est plus petit que AOD, quelle que soit la sécante OA, et, par suite, que la somme des trois angles du triangle AOM est moindre que AMO + MOA + AOD, c'est-à-dire moindre que deux droits.

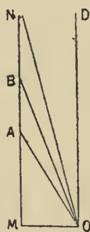
La proposition s'étend immédiatement à un triangle quelconque.

Proposition 4.

Théorème. — *Si l'atome est confondu avec zéro, la somme des trois angles d'un triangle est d'autant plus grande que le triangle est plus petit.*

Soit AOM un triangle rectangle en M, et ON la parallèle menée par le sommet O au côté opposé MA. L'angle A doit être plus grand que AON. En effet, si l'angle A est plus petit que AON, on peut mener dans AON une droite OB faisant avec OA un angle égal à l'angle A ; la droite ainsi menée doit être sécante à MN, puisque ON est la parallèle ; d'un autre côté, la droite OB ne peut pas rencontrer MN, puisque les deux angles alternes-internes A et AOB sont égaux ; il y a donc contra-

diction à supposer que l'angle A est plus petit que AON. Si l'angle A est égal à AON, cette égalité doit subsister quelle que soit la position de la sécante OA, et notamment lorsqu'elle vient se confondre avec OM; mais on voit que, dans cette position, l'angle qu'elle fait avec MN est droit, tandis que celui qu'elle fait avec ON est aigu ; donc l'angle A n'est pas égal à AON. Par conséquent, l'angle A doit être plus grand que AON. Comme cet angle est en même temps plus petit que AOD, d'après le théorème précédent, il en résulte que la somme des angles aigus du triangle AOM est comprise entre MON et MOD; et, si le point A se déplace de l'infini au point M, cette somme varie de MON à MOD; donc, la somme des trois angles du triangle considéré est d'autant plus grande que le triangle est plus petit.



Elle devient égale à deux droits, si le triangle considéré est nul.

Nous avions déjà signalé plusieurs de ces particularités, au début; nous les retrouvons maintenant comme conséquence directe et absolue de la confusion de l'atome et du zéro; nous retrouvons, entre autres, l'hypothèse fondamentale qui sert de

base à la néo-géométrie. Cela suffit à démontrer que, si l'atome est confondu avec zéro, ce sont les propriétés non euclidiennes des parallèles qui sont vraies et les autres qui sont fausses.

Le rôle de l'atome est donc bien net, en géométrie. Avec lui, la géométrie d'Euclide apparaît comme une vérité absolue, et la géométrie nouvelle reste à l'état de simple hypothèse : sans lui, c'est l'inverse qui se produit. On peut juger par là de l'importance de cet élément, qui a été si longtemps oublié et que nous avons précédemment justifié au point de vue rationnel et historique.

CHAPITRE IX

THÉORIE DE L'ATOME

Nous aurions pu borner là cette étude, et tirer dès à présent les conclusions qui en découlent : la question des hypothèses est jugée. Cependant, il nous paraît intéressant, avant de conclure, de donner une idée aussi exacte que possible de l'atome, de formuler les premiers éléments de la théorie atomique et d'en faire l'application à quelques questions de géométrie et de calcul, ne serait-ce que pour montrer comment tout le reste des mathématiques peut s'accommoder avec l'existence de l'atome. Les développements qui vont suivre indiquent la voie, mais rien de plus.

Nous terminerons par une réponse aux contradicteurs de l'atome.

L'atome, tel qu'il s'est présenté jusque-là, se définit en disant que c'est une grandeur plus petite que toutes les autres grandeurs de même espèce. Il y a évidemment autant de sortes d'atomes qu'il y a d'espèces de grandeurs mathématiques. Dans la géométrie, on en distingue trois genres principaux, savoir : l'atome de longueur, l'atome de surface et l'atome de volume.

S'il s'agit de l'atome linéaire, il n'a alors qu'une seule dimension ; c'est cette dimension qui, en disparaissant, réduit l'atome à un point mathématique, c'est-à-dire au néant de longueur. S'il s'agit de l'atome superficiel, il a deux dimensions, dont l'une peut être finie ou indéfinie, pendant que l'autre est à l'état atomique ; cette dernière, en disparaissant, réduit l'atome superficiel à une ligne mathématique, c'est-à-dire au néant de surface. S'il s'agit de l'atome solide, il a trois dimensions, dont deux peuvent être finies ou indéfinies, et dont la troisième au moins est atomique ; cette troisième dimension, en disparaissant, réduit l'atome solide à une surface mathématique, c'est-à-dire au néant de volume. Il n'y a d'ailleurs, et il ne peut y avoir, dans aucun genre d'atome, ni moitié, ni tiers, ni quart, ni fraction quelconque d'atome ; en ce sens, que toute grandeur qui, par

suite d'un changement de dimension, doit en avoir une plus petite que l'atome, est absolument nulle.

Rien ne s'oppose à ce qu'on introduise cet élément infinitésimal dans les raisonnements de la géométrie; toutefois, il faut renoncer à prétendre le représenter exactement, car, aussitôt qu'on veut le fixer d'une manière sensible, il cesse d'être l'atome. On devra donc se tenir constamment en garde, dans les déductions qu'on en tire, contre les illusions des sens et surtout contre celles de l'habitude; ces déductions sont en effet d'autant plus difficiles à suivre qu'elles s'appliquent toujours à une image plus grande que l'atome, et que le dessin de la figure jure forcément avec la vérité géométrique. La théorie de l'atome justifie admirablement cette boutade de Pascal, que « la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures faites de travers ».

Il nous paraît superflu de se demander combien il y a de points dans un atome de longueur. Il n'y en a pas un nombre fini, ni indéfini, attendu qu'un point n'ayant pas de dimension, le produit de zéro par un nombre quelconque, si grand qu'il soit, est toujours égal à zéro et jamais à l'atome. Il n'y en a pas non plus un nombre infini, car il n'existe

pas de nombre infini. Sans aucun doute, il sera possible de placer sur un atome autant de points qu'on voudra, précisément parce que le point n'a pas de dimension, mais on ne pourra pas marquer sur l'atome un seul point entre ses deux extrémités; autrement, l'atome serait composé de deux parties plus petites que lui, ce qui est contradictoire avec sa définition. Une manière commode de se représenter l'atome de longueur, c'est de le considérer comme un *couple de deux points* distincts, non séparables par aucun autre point. Une ligne alors sera formée par la succession d'atomes indivisibles, ayant deux à deux un point commun, comme les anneaux d'une chaîne sans interstice.

L'atome de surface se conçoit d'une manière analogue à l'atome linéaire. Imaginons qu'on ait placé perpendiculairement à une droite deux atomes de longueur, AA′ et BB′, et qu'ils soient séparés par une distance AB égale à un atome. Si l'ont joint par une droite leurs extrémités A′ et B′, la longueur A′B′ sera elle-même atomique; car, AB étant atome par hypothèse, il n'y a aucune place possible entre AA′ et BB′ pour un nouvel atome. La figure ainsi formée ABB′A′ a donc ses quatre côtés égaux, et, comme deux de ses angles sont droits, c'est un carré. De plus, c'est le plus

petit carré qu'on puisse concevoir ; autrement dit, c'est le *carré atome*.

Si l'on suppose que l'atome carré se déplace le long de la droite AB, il engendre une bande comprise entre deux lignes qui sont évidemment droites et équidistantes d'un atome. Cette bande, qui s'étend indéfiniment dans un sens et qui a pour base un atome de longueur dans l'autre, est la *bande atome*. Sur une bande atome, il sera possible de poser autant de lignes droites qu'on voudra, une ligne n'ayant rien de superficiel, mais on ne pourra pas en tracer une seule, entre les deux côtés de la bande, qui soit perpendiculaire à sa base, sans contradiction avec la définition de l'atome. Une manière commode de se représenter la bande atome, c'est de la considérer comme un *couple de deux droites* distinctes, distantes d'un atome en tous leurs points et non séparables par aucune autre ligne perpendiculaire à la base. Le plan sera formé alors par une succession de bandes atomes indivisibles, ayant deux à deux un côté commun, comme une page d'imprimerie sans interligne.

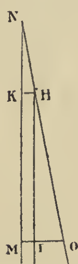


Le plus intéressant des atomes, c'est *l'atome d'angle*. On a vu, au commencement, qu'étant

donné un point et une droite, on peut toujours mener par ce point une seconde droite oblique à la première, et l'amener, par un mouvement de rotation autour du point, à faire avec la première un angle aussi petit qu'on le veut; puis, en continuant le mouvement, l'amener à faire avec la première un angle nul. Si le point donné est sur la droite fixe, c'est par la coïncidence des deux droites que leur angle devient nul. Si le point donné est extérieur à la droite fixe, c'est par le parallélisme euclidien ou non-euclidien des deux droites que leur angle se réduit à zéro. Comme on ne conçoit pas qu'un angle puisse passer de l'être au non-être sans prendre une dernière valeur qui soit moindre que toutes les autres et qui pourtant ne soit pas nulle, on est en droit d'affirmer qu'il existe un angle atome comme il existe une longueur atome et une bande atome.

Si l'atome linéaire est indivisible, l'atome d'angle l'est aussi, et l'on peut s'en rendre compte de la manière suivante. Soit MNO un angle atome; prenons sur MO, perpendiculaire à l'un des côtés, une longueur MI égale à l'atome linéaire, et imaginons qu'on ait construit, à partir de MI comme base, une bande atome ayant MN pour l'un de ses côtés. Le second côté de cette bande rencontre

ON en un point H; or, ce point H ne peut pas se trouver situé au sommet N, puisque HK doit égaler l'atome de longueur et que cette longueur n'est pas nulle; donc, ce point H sera situé à une certaine distance du sommet N. Il s'ensuit qu'aucune droite partant du sommet ne pourra pénétrer dans l'intérieur de l'angle; autrement, cette droite diviserait en deux parties l'atome de longueur HK, ce qui est impossible.



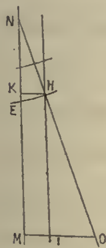
L'atome d'angle est donc indivisible, et on peut se le représenter comme un *couple de deux droites* distinctes, qui, partant du même point, s'écartent à une certaine distance d'un atome de longueur et ne sont séparables par aucune autre droite partant du même point. Le plan sera formé alors par une succession d'angles atomes indivisibles, ayant deux à deux un côté commun, comme une roue dont tous les rayons se toucheraient.

Des définitions précédentes, on tire facilement quelques propriétés qui en sont la conséquence :

1° Si l'on prolonge les côtés d'un angle atome d'une longueur égale au double, au triple, etc., de la distance où ils s'écartent d'un atome, ils

devront successivement s'écarter de deux atomes, trois atomes, etc.; par suite, si on les prolonge indéfiniment, ils devront s'écarter indéfiniment l'un de l'autre ; donc, *les deux côtés de l'angle atome vont en s'écartant indéfiniment.*

2° Puisqu'on peut construire sur un des côtés de l'angle atome une bande atome, il sera possible d'en construire une seconde sur la première, puis une troisième sur la seconde, et ainsi de suite. Les deux côtés de l'angle atome s'écartant indéfiniment, on obtiendra dans cet angle une bande à base finie, qu'on pourra répéter autant de fois qu'on voudra. *L'angle atome contient donc un nombre indéfiniment grand de bandes à base finie.*



3° Si l'on décrit, du sommet d'un angle atome comme centre, un cercle qui ait pour rayon la distance NH où les côtés de l'angle s'écartent d'un atome, l'arc de cercle HE compris entre les deux côtés ne se distingue pas de HK ; car, la flèche KE ou la différence NH-NK doit être, dans le triangle NHK, moindre que HK, qui est l'atome; donc, cette flèche KE est nulle. *L'atome circulaire est donc identique à l'atome rectiligne.*

4° Si l'on achève de décrire le cercle dont il

vient d'être question, la circonférence de ce cercle est la plus petite qu'il soit possible de concevoir. En effet, si l'on en imagine une autre d'un rayon plus petit et qu'on la suppose concentrique à la première, on voit immédiatement que l'arc qu'elle comprendra entre les deux côtés de l'angle atome doit être plus petit que l'atome HK, ce qui est absurde; donc, la circonférence de ce cercle est la plus petite qu'il soit possible de concevoir : c'est *le cercle atome.*

Il faut remarquer que la circonférence du cercle atome est exclusivement composée d'atomes de longueur, vus du centre sous l'angle atome, que les rayons sont deux à deux et sans exception les côtés d'un angle atome, et qu'ils forment, par leur succession autour du centre, toute la surface du cercle. Il faut remarquer aussi, HN étant plus grand que HK, qu'il n'y a pas de cercle ayant pour rayon l'atome de longueur. Il n'y a pas non plus de cercle inscrit ou circonscrit au carré atome.

5° Si, du centre d'un cercle atome, on regarde un des atomes de la circonférence, on le voit sous l'angle atome; si on le regarde de plus loin, on devra le voir sous un angle plus petit, c'est-à-dire sous un angle nul; d'ailleurs, on ne peut pas le

voir sous un angle plus grand, en se plaçant plus près, sans quoi il y aurait un cercle de rayon plus petit que le cercle atome, ce qui est absurde. Il est donc *impossible de voir un atome de longueur sous un autre angle que l'angle atome*, *et encore faut-il être placé pour cela à une distance déterminée*, *égale au rayon du cercle atome.*

6° Quelle est la longueur du rayon du cercle atome, autrement dit quelle est la distance à laquelle il faut se placer pour voir un atome de longueur sous l'angle atome? Il est impossible de répondre d'une manière exacte à cette question, attendu que le rayon du cercle atome dépend des dimensions de l'atome de longueur et qu'on ne connaît pas ces dimensions. On peut cependant préciser comme il suit le rapport qui existe entre ces deux éléments : premièrement, le rayon du cercle atome est une sécante issue du point H et faisant avec la droite NK l'angle atome (V. la fig. précédente), et l'on sait qu'une pareille sécante est indéfiniment grande par rapport à la perpendiculaire HK ; secondement, la perpendiculaire HK étant l'atome de longueur, il n'y a pas de point du plan qui soit plus rapproché que le point H de la droite NK ; la sécante HN est donc la plus petite des sécantes indéfinies qu'on peut mener à une

droite dans un plan. En résumé, le rayon du cercle atome est indéfiniment plus grand que l'atome de longueur, mais il est le plus petit de tous les indéfiniment grands. On satisfera logiquement à cette double condition en regardant l'atome comme *l'indéfiniment petit de l'ordre le plus élevé*, et le rayon du cercle atome comme *un indéfiniment petit de l'ordre immédiatement inférieur*.

Quant à savoir combien il y a d'atomes dans le rayon du cercle atome, ou, ce qui est la même chose, combien il y a de mètres dans une longueur indéfiniment plus grande que le mètre, nous n'en avons aucun besoin dans les applications que nous allons faire, soit à la géométrie, soit au calcul.

Les principes que nous venons d'exposer ne sont que les plus élémentaires de la théorie atomique ; ils suffisent pour démontrer les propositions caractéristiques de la géométrie euclidienne, et pour mettre en évidence ce qu'il y a de chimérique dans l'hypothèse de la divisibilité à l'infini, qui est le propre de la géométrie non euclidienne. Nous nous bornerons à en faire quelques applications dont il n'a pas encore été question.

CHAPITRE X

APPLICATION DE L'ATOME A LA GÉOMÉTRIE

Proposition 1.

Théorème. — Dans l'hypothèse non euclidienne, *le lieu des points équidistants d'une droite donnée* n'est pas une ligne droite, tandis qu'avec l'atome *ce lieu est une droite.* En effet, s'il s'agit des points distants d'un atome, on a vu que le lieu est le second côté d'une bande atome dont l'autre est la droite donnée ; le lieu est dans ce cas une ligne droite. S'il s'agit de points distants de plus d'un atome, on juxtaposera deux bandes atomes, trois bandes atomes, etc., en nombre suffisant pour composer une bande quelconque à base finie ; le second côté de cette bande à base finie

n'est autre chose qu'un côté de la dernière bande atome qu'on a juxtaposée ; donc, le lieu est encore dans ce cas une ligne droite.

Proposition 2.

THÉORÈME. — *La ligne droite qui est le lieu des points équidistants d'une droite donnée a toutes ses perpendiculaires communes avec la droite donnée.* En effet, on le reconnaît immédiatement pour les côtés de la première bande atome, et, en remontant de la première à la seconde, à la troisième, etc., on voit qu'il en est de même pour les deux côtés d'une bande quelconque à base finie.

Il résulte de là que deux droites perpendiculaires à une troisième ne vont pas en s'écartant indéfiniment l'une de l'autre, comme l'exige la géométrie non euclidienne ; cette propriété n'appartient qu'à deux droites faisant entre elles un angle si petit qu'il soit, mais différent de zéro ; et, en vertu de l'atome, *deux droites perpendiculaires à une troisième sont partout à égale distance l'une de l'autre.*

Il en résulte aussi que *le plus petit triangle rectangle* qu'on puisse concevoir n'est pas un point, ni une droite ; ce triangle rectangle mini-

mum a pour l'un de ses côtés l'atome de longueur et pour l'autre le rayon du cercle atome, la somme de ses angles égalant deux droits. De même, *le plus grand triangle rectangle* n'est pas bicuspidé, et la somme de ses angles ne se réduit pas à un droit, comme cela a lieu dans l'hypothèse non euclidienne ; ce triangle rectangle maximum a pour ses côtés de l'angle droit deux droites indéfinies, et pour hypoténuse une sécante également indéfinie, faisant avec l'un des côtés l'angle atome et avec l'autre un angle égal à un droit moins l'atome, la somme de ses angles égalant deux droits. Si ce triangle maximum est isocèle, les deux angles aigus valent chacun un demi-droit.

Proposition 3.

THÉORÈME. — L'identité entre l'atome de ligne droite et l'atome de courbe *semble confirmer l'opinion émise par Helmholtz*, dans son mémoire lu à la Société d'histoire naturelle et de médecine d'Heidelberg, « sur les faits qui servent de base à la géométrie». Le savant physicien pose en principe qu'il doit exister, dans toute ligne, un premier élément de longueur *ds* indépendant de toute idée de direction, lequel lui paraît nécessaire et suffisant pour établir un système de géométrie

générale et complète. Mais cet élément *ds* n'est pas tout à fait l'atome. Helmholtz commence par se servir, pour mesurer son élément *ds*, de trois autres éléments composants, *du*,*dv*, *dw*, qu'il imagine avec raison avoir une relation avec *ds ;* or, ces trois composants sont vraisemblablement, bien qu'il ne le dise pas, moindres que le composé ; donc, son élément *ds* n'est pas l'atome, l'atome n'ayant rien de plus petit que lui.

D'un autre côté, Helmholtz admet que la longueur de cet élément est *la racine carrée d'une fonction homogène du second degré de ses trois composants.* Si cette fonction d'Helmholtz n'est qu'une hypothèse, nous n'avons pas à en tenir compte ; si elle n'est pas une simple hypothèse, il faut alors, pour rentrer dans la possibilité des faits, que les trois composants soient des atomes, et que la formule algébrique représente une propriété géométrique de ces trois atomes. Mais, nous avons vu qu'avec deux atomes on peut obtenir, dans un plan, un carré ; en y joignant le troisième, on pourra obtenir, dans l'espace, un cube, et la propriété géométrique de ces atomes se traduira exactement par la formule connue du théorème de Pythagore. Si le calculateur part d'une formule plus générale, il ajoute ici à la formule exacte quelque

chose, qui est étranger à l'atome, et, par suite, pris en dehors de la réalité. Or, l'algèbre est un instrument de précision qui découvre finalement tout ce qu'on a enfermé dans une formule initiale, mais sa puissance ne va pas plus loin ; elle devra donc logiquement lui donner, à la fin de son analyse, tout ce qu'elle renfermait, au commencement. C'est ce qui arrive à Helmholtz : il obtient d'une part la géométrie d'Euclide, qui répond à la réalité de l'atome, et d'autre part une seconde géométrie, qui correspond à ce qu'il a introduit d'inconnu dans sa formule, sous le couvert de la généralisation.

On se demande pourquoi il n'est pas parti de la racine bicarrée d'une fonction du 4e degré, ou de toute autre fonction, aussi bien que de la racine carrée d'une fonction du 2e degré ; il en aurait tiré certainement une géométrie de plus en plus fantastique, tant il est facile de s'égarer en dehors des principes rationnels de la théorie atomique.

Proposition 4.

Théorème. — En revanche, l'identité entre l'atome de ligne droite et l'atome de courbe *fournit une justification remarquable de la méthode des limites*, méthode si employée dans les mathématiques.

Lorsqu'on veut procéder à la mesure d'un arc de courbe, par exemple, on commence par inscrire et circonscrire à l'arc une ligne brisée quelconque, puis on fait en sorte que, le nombre des côtés augmentant indéfiniment, la longueur de chaque côté diminue indéfiniment ; on s'assure ensuite que le périmètre des lignes brisées inscrites va en augmentant et que celui des lignes brisées circonscrites va en diminuant, et enfin que les uns et les autres tendent vers une limite commune, lorsque leurs côtés tendent vers zéro, quel que soit le mode d'inscription qu'on ait adopté au point de départ. Cette limite commune est prise comme définition de la longueur de l'arc par quelques géomètres, et par d'autres comme une simple propriété de la longueur de cet arc ; mais, dans les deux cas, le procédé peut se justifier par l'identité de l'atome rectiligne et de l'atome courbe.

En effet, lorsque les côtés de la ligne brisée, inscrite ou circonscrite, tendent vers zéro, ils deviennent de véritables atomes avant que d'être nuls ; à ce moment, qui marque le terme exact de la construction géométrique, rien n'empêche que ces atomes, doués d'étendue et indivisibles, puissent être disposés en ligne droite les uns à la suite des autres ; ils forment alors une longueur rectiligne

déterminée, égale au périmètre de la ligne brisée, inscrite ou circonscrite, et, comme les atomes qui composent l'arc de courbe sont identiques à ceux qui composent la ligne droite, il en résulte que la longueur de ces lignes brisées ainsi rectifiées n'est autre que celle de l'arc proposé, et qu'on a le droit de la prendre, à volonté, pour une définition ou pour une propriété de la longueur de l'arc.

Avec l'atome, le procédé des limites revêt donc tous les caractères de la méthode déductive la plus rigoureuse et la plus concrète. Au contraire, si l'on suppose que l'atome n'existe pas, qu'il est confondu avec zéro, ou, ce qui revient au même, que la divisibilité peut être poussée à l'infini, la limite du périmètre des lignes brisées n'est plus qu'une série de points dépourvus de dimension, et, outre qu'il n'est pas dans l'esprit géométrique d'admettre qu'une somme de points puisse former la longueur d'une ligne, il reste dans le passage forcé du dernier élément infinitésimal d'une ligne à zéro quelque chose de vague et de mystérieux, qui disparaît complètement avec l'atome. Il y aurait donc avantage pour la méthode des limites à s'arrêter à l'atome, au lieu d'aller jusqu'à zéro, bien qu'au fond cette méthode soit

indépendante de la divisibilité ou non-divisibilité à l'infini.

Proposition 5.

Théorème. — L'atome résout catégoriquement *la difficulté si souvent formulée depuis deux siècles* par les partisans de la divisibilité à l'infini. Je la prends dans une *lettre du cardinal de Polignac au comte d'Agenois*, datée du 14 mars 1721 (V. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Lyon*, t. XXVI, 2e série, page 279. Correspondance inédite sur la divisibilité de la matière, par Arnould Locard). « Je fais partir de la terre, écrit-il, un fil raide et inflexible, que je pousse jusqu'au soleil. Ensuite, je fais mouvoir ce fil, en sorte que son sommet ne parcoure en un moment qu'un atome de l'espace, le pied demeurant fixe. Il est démontré que tout le fil marche, mais avec cette différence que le sommet fait plus de chemin que la partie qui le suit, et que le mouvement est toujours moindre dans toutes les parties du fil à mesure qu'elles approchent du pied. Cela se voit dans le mouvement d'une roue. Donc l'atome parcouru en haut a autant de parties réelles qu'il y a de différences dans le chemin que font celles de tout le fil. Que sera-ce si je pousse mon fil jusqu'au

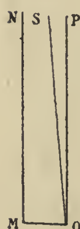
plus haut des cieux ? Adieu, monsieur, je vous honore et vous vénère, mais je demande un aveu ou une réfutation démontrée ».

Voici la réfutation : d'un point de l'espace, on ne peut voir un atome de longueur que sous l'atome d'angle, et encore faut-il qu'on soit placé pour cela à une distance égale au rayon du cercle atome. Or, ce rayon, bien qu'inconnu, est très petit, puisque c'est la plus petite des sécantes indéfinies qu'on peut mener de tous les points d'un plan à une droite donnée dans ce plan. Il n'est pas probable que la distance de la terre au soleil soit précisément le rayon du cercle atome ; mais, même dans cette supposition, quand le sommet du fil tendu entre les deux astres parcourra un atome sur le soleil, tous les autres points du fil devront parcourir des chemins moindres que l'atome, c'est-à-dire absolument nuls ; ils resteront donc absolument immobiles, et, plus vous vous éloignerez dans la profondeur des cieux, plus le fait deviendra saisissant. L'échafaudage des raisonnements en faveur de la divisibilité à l'infini s'écroule en présence de l'atome.

Proposition 6.

Théorème. — La relation que nous avons recon-

nue entre la bande atome et l'angle l'atome justifie *la démonstration du postulatum d'Euclide* telle qu'elle a été donnée par Louis Bertrand, dans son *Développement des mathématiques*, en 1778, et par A.-J.-H. Vincent, dans son *Précis de géométrie élémentaire*, en 1837, et qu'on peut ramener à ces termes. Soit OM la base d'une bande quelconque, et POS un angle atome; le côté OS suffisamment prolongé devra sortir de la bande, et, par suite, rencontrer MN ; sans quoi, la bande renfermerait l'angle atome tout entier, ce qui est impossible, puisque l'angle atome doit contenir, au contraire, un nombre indéfiniment grand de bandes égales à la bande donnée.

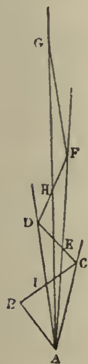


Proposition 7.

Théorème. — Avec l'atome, on complète aisément *la démonstration que Legendre a insérée dans* la 12e édition de ses *Éléments de géométrie*, en 1823, pour prouver que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits, sans le secours du postulatum d'Euclide. On sait, en effet, transformer un triangle donné en un autre, dans lequel la somme des angles reste la même, et

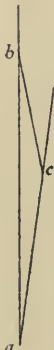
dont l'un des angles devient aussi petit qu'on le veut. Cette transformation peut s'opérer de plusieurs façons ; en voici une des plus simples.

Considérons un triangle ABC, dont AC est le plus grand côté, et faisons tourner ce côté AC autour du sommet A jusqu'à ce qu'il passe par le milieu I de BC. En prenant ID égal à IA et menant CD, on aura formé un second triangle ADC, dans lequel la somme des angles est la même que dans le premier, en vertu de l'égalité des triangles AIB et CID ; de plus, l'angle IDC, qui est égal à IAB, est plus grand que IAC ; par conséquent, l'angle IAC est plus petit que la moitié de l'angle A du triangle donné.



Considérons maintenant le triangle ADC, dans lequel AD est le plus grand côté, et faisons tourner ce côté AD autour du sommet A, en sens inverse de la première fois, jusqu'à ce qu'il passe par le milieu E de CD. En prenant EF égal à EA et menant DF, on formera un troisième triangle ADF, dans lequel la somme des angles est la même que dans le second, et, par suite, que dans le premier, et dont l'angle DAF est plus petit que le quart de l'angle A du triangle donné.

Le troisième triangle obtenu nous en donnera de même un quatrième, celui-ci un cinquième, puis un sixième, etc., dans lequel la somme des angles reste toujours la même que dans le premier, et dont l'angle au sommet A devient aussi petit qu'on le veut.



Rien n'empêche de supposer qu'on soit parvenu de la sorte à un triangle *abc* dans lequel l'angle *bac* est égal à l'atome. Si l'on se propose, à partir de ce triangle, de construire le suivant, on devra commencer par rapprocher le plus grand côté *ab* du plus petit *ac*, en le faisant tourner autour du sommet *a*, ou autrement ; mais l'angle atome *bac* ne peut diminuer qu'en devenant nul ; le côté *ab* devra donc coïncider avec *ac*, et, par suite, *ac* avec *bc*, et les trois angles du triangle se réduiront au seul angle *c*, qui devient égal à deux droits. Donc, dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux droits.

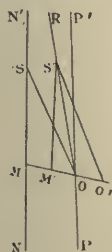
Proposition 8.

Théorème. — Euclide a défini les parallèles « des droites qui, dans un plan, étant prolongées autant qu'on le veut dans un sens et dans l'autre,

ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre ».
On démontre fort simplement, en partant de cette définition et en se servant de l'atome, *qu'on ne peut mener par un point donné, qu'une seule parallèle a une droite.*

Soit NN′ la droite, et O le point donné.

Par le point O, on peut mener une sécante



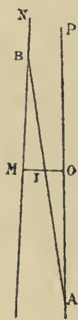
quelconque OM, puis une droite PP′ faisant avec OM un angle MOP′ égal à OMN : la droite ainsi menée ne rencontre pas NN′ (V. la démonstration faite plus haut, chap. III) ; donc elle est, d'après la définition d'Euclide, parallèle à la droite NN′.

Supposons maintenant qu'on ait pu mener par le point O, une seconde droite OR ne rencontrant pas NN′. En la faisant tourner autour du point O, on pourra l'amener à couper NN′ sous un angle OSM égal à l'atome d'angle. Or, si l'on transporte le triangle OMS, le long de MO, jusqu'à ce que son sommet S rencontre OR en S′, il prendra une position O′M′S′ dans laquelle les deux extrémités de sa base, M′ et O′, tomberont de part et d'autre du point O. Dans cette position, l'angle OS′M′ est plus petit que O′S′M′, qui est égal à l'atome d'angle OSM ; donc, l'angle OS′M′ doit être

nul, ce qui est impossible, attendu que les deux côtés de cet angle, S'O et S'M', sont des droites distinctes l'une de l'autre. On en conclut que, par le point O, on ne peut pas mener une seconde droite OR ne rencontrant pas NN'; en d'autres termes, on ne peut mener, par un point donné, qu'une seule parallèle à une droite, si l'on définit les parallèles comme le fait Euclide.

Proposition 9.

Théorème. — Avec l'atome, on démontre facilement que, *dans aucun cas, l'angle de parallélisme ne peut être aigu*, comme le demandent les géomètres non euclidiens.



Supposons en effet que la droite OP soit parallèle à MN, que OM soit perpendiculaire à MN, et que l'angle MOP soit aigu. On peut mener, par le milieu I de OM, une sécante IA faisant avec OP l'angle atome A; cette sécante doit, d'après la définition des parallèles, rencontrer MN en un point B. Or, l'angle B ne peut pas être plus petit que A, puisque celui-ci est l'atome; il ne peut pas non plus être plus grand que A, car on pourrait, dans ce cas, le diminuer un peu en faisant tour-

ner vers AP la sécante AB autour du point A, et, dans la nouvelle position qu'elle prendrait, la sécante AB ferait avec OP un angle plus petit que l'atome, ce qui est impossible. Donc, l'angle B doit égaler A. Il en résulte que les deux triangles IBM et IAO sont égaux, comme ayant un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun ; mais le premier de ces triangles est rectangle en M, donc le second est aussi rectangle en O, et l'angle MOP doit être droit. L'angle de parallélisme ne peut donc, dans aucun cas, être aigu.

Ce théorème peut se démontrer de plusieurs autres manières. Toutes les propositions de la géométrie non euclidienne viennent échouer directement contre l'atome.

CHAPITRE XI

APPLICATION DE L'ATOME AU CALCUL

La première chose qu'on découvre, quand il s'agit de calcul, c'est l'existence d'un atome numérique, qui est distinct de l'atome géométrique et qui en dérive logiquement.

Dans chaque espèce de grandeur, l'atome géométrique est en effet la plus petite de toutes celles qui existent ; un nombre n'est autre chose que l'expression du rapport d'une grandeur à une autre de même espèce. Il en résulte que, si on se représente toute l'échelle des grandeurs d'une même espèce, comme allant de la plus petite α à la plus grande ω, la valeur absolue de tous les nombres résultera de la comparaison de deux grandeurs appartenant à cette échelle.

Le terme de comparaison est-il α? Toutes les autres grandeurs seront exprimées par des multiples de α, c'est-à-dire par des nombres plus grands que l'unité; la plus grande sera représentée par le rapport $\frac{\omega}{\alpha}$.

Le terme de comparaison est-il ω? Toutes les autres grandeurs seront exprimées par des sous-multiples de ω, c'est-à-dire par des nombres plus petits que l'unité; la plus petite sera représentée par le rapport $\frac{\alpha}{\omega}$. Ce nombre $\frac{\alpha}{\omega}$, qui est l'expression du rapport de la plus petite à la plus grande des grandeurs de la même espèce, est évidemment le plus petit de tous les nombres possibles : c'est *l'atome numérique*. Son inverse est le plus grand.

Ce qui caractérise l'atome numérique, c'est qu'il n'y a pas de nombre plus petit que lui, si ce n'est zéro; par conséquent, tout nombre qui, par suite d'un calcul, doit égaler une fraction ou une puissance de cet atome, est absolument nul, comme une grandeur est nulle quand, par suite d'un changement de valeur dans sa dimension atomique, elle doit être moindre que l'atome de son espèce. Cette propriété de l'atome numérique intéresse certains points du calcul dans la théorie des nombres.

DÉFINITION DE L'INCOMMENSURABLE

Dans la théorie des nombres, on donne ordinairement le nom d'incommensurable au rapport de deux grandeurs qui n'ont entre elles aucune mesure commune, si petite qu'elle soit. Cette définition a le défaut d'être impossible à justifier absolument. On établit, en effet, dans la recherche de la plus grande commune mesure de deux grandeurs, que l'opération, une fois commencée, peut se continuer indéfiniment, ou encore, qu'on peut imaginer l'une des deux grandeurs divisée en parties de plus en plus petites, sans qu'aucune de ces parties soit contenue exactement dans l'autre. Mais, cela ne suffit pas pour qu'on en puisse conclure que les deux grandeurs n'ont aucune commune mesure, c'est-à-dire que leur plus grande commune mesure est nulle ; il faudrait démontrer que le procédé, effectif ou mental, des subdivisions qu'on emploie peut être poussé assez loin pour nous donner une partie nulle, et l'on sait qu'un pareil résultat ne peut être obtenu. On est donc forcé de s'arrêter à un terme précédant zéro et différant de lui, bien que d'aussi peu qu'on voudra, c'est-à-dire à l'atome. De telle sorte que

la circonstance finale et négative, visée dans la définition ordinaire du mot incommensurable, ne se présente jamais. En réalité, il n'y a pas de grandeurs incommensurables entre elles, et ce qui est vrai, c'est que deux grandeurs de même espèce ont toujours pour commune mesure l'atome, sinon un multiple de cet atome.

Théoriquement, la question se réduit à remplacer le zéro ou le néant par l'atome.

Dans la pratique, on peut distinguer les deux cas, en conservant les mots de commensurable et incommensurable : seront dites *commensurables* les grandeurs qui ont pour commune mesure un multiple de l'atome, et, dans ce cas, on trouvera cette commune mesure après un nombre fini d'opérations ; seront dites *incommensurables* celles qui n'ont d'autre commune mesure que l'atome, et, dans ce cas, pour trouver la commune mesure, il faudra un nombre indéfini d'opérations. Mais il n'y a pas d'autre distinction qui soit rationnellement possible, sous ce rapport. En suivant cet ordre d'idées, nous dirons que la circonférence d'un cercle, son diamètre et le côté du carré inscrit sont des lignes n'ayant entre elles d'autre commune mesure que l'atome de longueur. Nous admettrons que toute propriété d'un rapport, qui

est démontrée dans le cas où les deux termes de ce rapport ont une commune mesure, aussi petite qu'on veut, est par cela même démontrée d'une manière générale. Toute la théorie ordinaire des incommensurables deviendra plus rigoureuse et plus simple. Nous avons déjà vu ce que la substitution de l'atome à zéro apporte de simplicité, de précision et de rigueur dans la théorie des limites. Il n'est pas étonnant qu'il en soit de même en ce qui concerne les incommensurables.

CHAPITRE XII

APPLICATION DE L'ATOME A LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION

Nous allons retrouver, grâce à l'atome, les mêmes avantages de simplicité et de rigueur dans la définition et le calcul des dérivées d'une fonction.

Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe continue quelconque.

Si l'on donne à la variable x, à partir d'un point déterminé, un accroissement très petit h, il en résulte, comme on sait, pour la fonction y, un accroissement correspondant qui est lui-même très petit, et, si les deux accroissements tendent vers zéro, leur rapport $\frac{k}{h}$ a, en général, une valeur finie, attendu que ce rapport, à la limite,

représente l'inclinaison sur l'un des axes de coordonnées de la tangente à la courbe au point considéré. C'est la limite de ce rapport, dont les termes deviennent nuls, qu'on nomme habituellement la *dérivée première* ou simplement la *dérivée* de la fonction.

Mais, d'après la théorie de l'atome, on a la certitude que l'un des termes h ou k, suivant que la fonction décroît moins vite ou plus vite que la variable, prendra une valeur atomique avant de devenir zéro, et qu'il en sera de même de l'autre, puisque leur rapport a, en général, une valeur finie; par conséquent, il y aura toujours un accroissement h de la variable qui sera le plus petit auquel puisse correspondre un accroissement k de la fonction. La dérivée d'une fonction peut donc se définir comme étant *le rapport de l'accroissement de la fonction au plus petit accroissement de la variable qui puisse lui correspondre.*

La *dérivée* d'une fonction étant elle-même une fonction, la dérivée de cette *dérivée* nous donnera, de la même manière, la définition de la *dérivée seconde;* la dérivée de la dérivée seconde nous donnera la *dérivée troisième*, et ainsi de suite.

Si l'on désigne par ε le plus petit accroissement de la variable qui puisse produire un accroisse-

ment correspondant dans la fonction et par η cet accroissement correspondant, on aura par définition :

$$f'(x) = \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

C'est précisément le résultat qu'on obtient en introduisant l'atome dans le développement d'une fonction en série. D'après la formule de Taylor, appliquée à la fonction $f(x)$, on doit avoir en effet :

$$k = hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \ldots\ldots,$$

$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$ désignant les dérivées successives de $f(x)$, telles qu'on les définit habituellement.

Donnons à h la plus petite valeur ε qui produit un accroissement correspondant η dans la fonction. Chacun des termes contenant ε^2, $\varepsilon^3, \ldots\ldots$ dans le développement, et même la somme d'autant de ces termes qu'on voudra, est moindre que ε; par conséquent, tous ces termes réunis sont sans influence sur l'accroissement de la fonction, puisque l'accroissement ε de la variable est le plus petit qui puisse produire un accroissement correspondant dans la fonction. Donc, la formule se réduit à celle-ci :

$$\eta = \varepsilon f'(x),$$

d'où :

$$f'(x) = \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

Cette nouvelle définition de la dérivée d'une fonction n'est point en opposition avec la définition habituelle. Elle en diffère uniquement en ce que, dans la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, le zéro ou le néant est remplacé par l'atome. La méthode infinitésimale, comme celle des limites, dit Lagrange, offre « le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent pour ainsi dire d'être des quantités ; car, quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies (ou indéfinies), ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise aussitôt que ses deux termes deviennent l'un et l'autre nuls à la fois ». L'expression $\frac{0}{0}$, qu'on trouve à la limite, n'est d'ailleurs qu'un symbole abstrait, purement conventionnel, qui ne rappelle rien des éléments particuliers qu'on a soumis au raisonnement avant de l'atteindre. Est-on bien sûr même de pouvoir l'atteindre, si l'on admet la divisibilité d'une ligne à l'infini, comme il paraît nécessaire de le faire?

Aucune de ces objections ne peut se soutenir, si, au lieu de poursuivre la limite jusqu'à zéro, on s'arrête à l'atome. Les deux termes du rapport $\frac{\eta}{\varepsilon}$ sont effectivement des réalités concrètes, tout comme h et k avant qu'ils ne soient nuls. Il semble aussi qu'en raison de leur état atomique, les deux termes de ce rapport soient mieux appropriés que tout autre à l'idée qu'on doit se faire du mode de génération d'une courbe ; car, il est bien difficile de comprendre qu'on puisse réaliser la continuité d'une courbe, en passant d'un point aux suivants, autrement que par voie d'atomes. Nous avons vu déjà qu'on engendre une surface angulaire en faisant tourner une droite successivement, autour d'un de ses points, d'une fraction d'angle égale à $\frac{1^{D}}{n}$; et, dans cette fraction, n doit être supposé aussi grand que possible, si l'on veut obtenir la continuité, mais non pas infini, sans quoi la droite ne tournerait pas. Cette fraction $\frac{1^{D}}{n}$ représente donc, dans la génération d'un angle, l'atome de rotation, absolument comme la fraction $\frac{\eta}{\varepsilon}$ représente, dans la génération d'une courbe, l'atome de direction. La théorie atomique nous fournit ainsi le seul moyen intelligible de réaliser

la continuité d'une courbe et d'une surface.

Au surplus, examinons les propriétés qui découlent de cette nouvelle définition de la dérivée.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

1° La relation $\eta = \varepsilon f'(x)$, que nous venons de trouver, n'est pas une égalité approchée, comme cette autre, $k = hf'(x)$, laquelle n'est vraie que lorsqu'on passe à la limite zéro et se réduit alors à une identité : c'est une égalité rigoureusement exacte, du moment que les deux éléments qui la constituent, η et ε, sont des atomes correspondants.

2° *Deux fonctions* inverses *ont évidemment des dérivées qui sont l'une l'inverse de l'autre ;* car, si la dérivée de la première fonction est $\frac{\eta}{\varepsilon}$, celle de la seconde est $\frac{\varepsilon}{\eta}$.

3° *Toute fonction, dont la dérivée est nulle, est une constante ;* en effet, si $f'(x) = 0$, dans la relation $\eta = \varepsilon f'(x)$, $\eta = 0$, et la fonction ne croît pas quand la variable croît.

4° *Deux fonctions qui ont la même dérivée, pour le même accroissement de la variable, diffèrent d'une quantité constante.* En effet, si l'on

désigne par η et θ les deux accroissements de ces fonctions qui correspondent au même accroissement ε de la variable, on aura : $\eta = \varepsilon f''(x)$ et $\theta = \varepsilon f'(x)$; donc $\theta = \eta$. Les fonctions recevant deux accroissements égaux ne peuvent différer que d'une quantité constante.

La détermination du *maximum* et du *minimum* d'une fonction, celle du *sens de la concavité ou convexité d'une courbe*, la recherche de la *vraie valeur d'une fonction* qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et bien d'autres questions générales, qui dépendent des dérivées successives d'une fonction, se trouvent résolues fort simplement par l'introduction de l'atome dans les premiers principes.

PROPRIÉTÉS SPÉCIALES

Appliquons l'atome à quelques questions particulières et notamment à la recherche de la dérivée des fonctions simples qu'on considère ordinairement dans les mathématiques.

Fonction x^m

Soit proposé de trouver la dérivée de x^m. Si l'on y remplace x par $x + \varepsilon$, ε désignant l'atome numé-

rique ou simplement le plus petit nombre qui puisse produire un accroissement dans la fonction, on sait qu'on aura, d'après la formule du binôme de Newton, pour l'accroissement correspondant de cette fonction :

$$\eta = m\varepsilon x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\varepsilon^2 x^{m-2} + \ldots\ldots$$

Mais, tous les termes du développement qui suivent le premier sont nuls ou de nul effet sur la fonction ; donc, on a exactement :

$$\eta = m\varepsilon x^{m-1},$$

d'où l'on tire : $\dfrac{\eta}{\varepsilon} = m x^{m-1}$.

Telle est la dérivée de la fonction x^m.

On trouvera de même celle d'un polynôme quelconque.

Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$.

Considérons l'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$. Lorsque m augmente indéfiniment, on sait que cette expression tend vers une limite, qui est le nombre e. Peut-on dire que ce nombre e est égal à $(1+0)^\infty$, comme cela est nécessaire quand on prend 0 pour l'atome des nombres ? Evidemment, c'est là un pur symbole qui ne représente rien à l'esprit. Si l'on pose, au contraire, $\frac{1}{m} = \varepsilon$, d'où $m = \frac{1}{\varepsilon}$, ε étant

l'atome numérique, on trouve $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ pour la limite de l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m augmente indéfiniment, ce qui donne l'égalité vraie :

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e.$$

C'est du reste ce qu'on obtient, en appliquant directement l'atome à la fonction e^x développée en série :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots..$$

Si l'on fait $x = \varepsilon$, ε étant l'atome numérique, tous les termes qui suivent le second dans le développement sont nuls, et il reste :

$$e^\varepsilon = 1 + \varepsilon$$

d'où l'on tire : $e = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Fonction exponentielle.

Proposons-nous de trouver la dérivée de la fonction e^x. Si l'on y remplace x par $x+\varepsilon$, ε étant l'atome numérique, on aura pour l'accroissement correspondant η de la fonction :

$$\eta = e^{x+\varepsilon} - e^x \text{ ou } \eta = e^x(e^\varepsilon - 1).$$

Mais $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$, et, par suite, $e_\varepsilon - 1 = \varepsilon$; donc. on aura :

$$\eta = e^x\varepsilon,$$

d'où l'on tire : $\frac{\eta}{\varepsilon} = e^x$.

Telle est la dérivée de la fonction e^x.

On trouvera de même que $a^\varepsilon - 1 = \varepsilon la$, et, par suite, que la dérivée de a^x est $a^x la$.

Fonction logarithmique.

Le théorème des fonctions *inverses*, qui est évident, nous donne la dérivée de la fonction logarithmique.

Si l'on pose $lx = y$, on en déduit $x = e^y$. Or, on a, d'après ce qui précède :

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = e^y \text{ ou } \frac{\eta}{\varepsilon} = x.$$

Donc, en prenant l'inverse, on trouvera pour la dérivée de lx :

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{1}{x}.$$

De même, en posant $\log x = y$, on trouvera pour la dérivée de $\log x$:

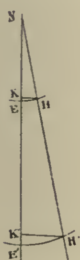
$$\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{1}{xla}.$$

Fonctions trigonométriques.

S'il s'agit d'une fonction trigonométrique, on se rappellera que, dans un cercle quelconque, une ligne trigonométrique d'un angle au centre n'est

autre chose que le rapport de cette ligne au rayon du cercle. Le rayon du cercle étant pris habituellement pour unité, toute ligne trigonométrique entre donc dans le calcul sous la forme d'un nombre, qui varie d'une manière continue entre deux limites extrêmes, pendant que l'arc de cercle, qui sert de mesure à l'angle au centre correspondant, croît lui-même d'une manière continue.

Si l'on choisit le cercle atome pour cercle trigonométrique, on devra noter dans ce cas plusieurs particularités remarquables, que nous avons déjà rencontrées dans la théorie atomique (Chapitre VIII). Ainsi, par exemple, le plus petit arc EH de ce cercle est compris entre les côtés du plus petit angle HNE, et égal à l'atome de longueur ; le sinus HK ne se distingue pas de l'arc EH, la tangente non plus, et le cosinus NK est égal au rayon NE, car la flèche KE est nulle ; enfin, le rapport $\frac{HK}{NE}$ est un indéfiniment petit du premier ordre. Donc, dans le cercle atome, en appelant ε le rapport du plus petit arc possible au rayon, on a les relations : $\sin \varepsilon = \varepsilon$, $\text{tang}\, \varepsilon = \varepsilon$, $\cos \varepsilon = 1$.



Ces relations, étant vraies dans le cercle atome,

le sont aussi dans un cercle de rayon quelconque, puisque le rapport de l'arc, du sinus, de la tangente, du cosinus au rayon du cercle ne dépend pas de la longueur du rayon ; le nombre $\cos\varepsilon$ est donc toujours égal à l'unité, et les nombres ε, $\sin\varepsilon$, $\operatorname{tang}\varepsilon$, sont toujours des infiniment petits du premier ordre, égaux entre eux et représentant le plus petit arc, le plus petit sinus et la plus petite tangente que puisse avoir un angle au centre dans le cercle considéré.

C'est aussi ce qu'on obtient en appliquant directement l'atome aux fonctions $\sin x$, $\cos x$, développées en série et à la série de Leibnitz. Ces trois séries sont :

$$(1)\ \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$(2)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots\ldots$$

$$(3)\ \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$

Si l'on fait $x = \varepsilon$, ε désignant le plus petit arc qui puisse produire un accroissement correspondant dans la fonction, tous les termes qui suivent le premier sont sans influence pour accroître la fonction, et l'on trouve immédiatement :

$$\sin\varepsilon = \varepsilon,\ \cos\varepsilon = 1,\ \varepsilon = \operatorname{tang}\varepsilon.$$

Il faut noter encore que, si le nombre ε est un

indéfiniment petit du 1er ordre, ce nombre devient zéro, quand l'angle devient nul. L'arc, le sinus et la tangente trigonométrique du plus petit angle passent donc de ε à o, sans prendre aucune des valeurs intermédiaires entre ε et o. Par conséquent, quelque petit que soit l'angle, aucune de ces lignes ne peut égaler l'atome numérique ; et, si l'une d'entre elles doit, par suite d'un calcul, avoir une valeur moindre que ε, cette valeur est nulle, absolument comme si ε était l'atome numérique.

Fonction sin$x$

Proposons-nous de trouver la dérivée de la fonction sin$x$. Si l'on y remplace x par $x + \varepsilon$, ε désignant le plus petit arc qui puisse produire un accroissement correspondant dans la fonction, on aura pour exprimer cet accroissement η :

$$\eta = \sin(x+\varepsilon) - \sin x,$$

ou, en développant,

$$\eta = \sin x \cos\varepsilon + \sin\varepsilon \cos x - \sin x$$

Mais $\cos\varepsilon = 1$, et $\sin\varepsilon = \varepsilon$; par conséquent, la formule se réduit à :

$$\eta = \sin x + \varepsilon \cos x - \sin x,$$

ou $$\eta = \varepsilon \cos x,$$

d'où l'on tire : $$\frac{\eta}{\varepsilon} = \cos x.$$

Telle est la dérivée de la fonction sin$x$.

Fonction $\cos x$.

Proposons-nous de trouver la dérivée de la fonction $\cos x$. Si l'on y remplace x par $x + \varepsilon$, ε désignant le plus petit arc qui puisse produire un accroissement dans la fonction, on aura pour l'accroissement correspondant η de la fonction :

$$\eta = \cos(x + \varepsilon) - \cos x,$$

ou, en développant :

$$\eta = \cos x \cos\varepsilon - \sin x \sin\varepsilon - \cos x.$$

Mais $\cos\varepsilon = 1$ et $\sin\varepsilon = \varepsilon$; par conséquent, la formule se réduit à :

$$\eta = \cos x - \varepsilon \sin x - \cos x,$$

ou

$$\eta = - \varepsilon \sin x,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = - \sin x.$$

Telle est la dérivée de la fonction $\cos x$.

Fonction $\operatorname{tang} x$.

Soit proposé de trouver la dérivée de la fonction $\operatorname{tang} x$. Si l'on y remplace x par $x + \varepsilon$, ε désignant le plus petit arc qui puisse produire un accroissement dans la fonction, on aura pour l'accroissement correspondant η de la fonction :

$$\eta = \operatorname{tang}(x + \varepsilon) - \operatorname{tang} x,$$

ou, en transformant cette différence de deux tangentes,

$$\eta = \frac{\sin\varepsilon}{\cos(x+\varepsilon)\cos x}.$$

Si l'on développe $\cos(x+\varepsilon)$, on obtient :

$$\eta = \frac{\sin\varepsilon}{\cos^2 x \cos\varepsilon - \sin\varepsilon \sin x \cos x}.$$

Mais $\sin\varepsilon = \varepsilon$, $\cos\varepsilon = 1$, et le terme $\sin\varepsilon \sin x \cos x$ est nul, car il doit être moindre que $\sin\varepsilon$; donc, la formule se réduit à :

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\cos^2 x},$$

d'où l'on tire : $$\frac{\eta}{\varepsilon} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Telle est la dérivée de la fonction $\tan g x$.

Cette dérivée, comme celle de toutes les autres fonctions trigonométriques, aurait pu se tirer des deux premières par la règle de dérivation d'un quotient.

Fonction arctang$x$.

Le théorème des fonctions *inverses*, qui est évident, nous donnera la dérivée des fonctions arcsin$x$, arccos$x$, et arctang$x$.

Soit proposé de trouver la dérivée de la fonction arctang$x$.

Si l'on pose arctang$x = y$, on en tire immédia-

tement $x = \text{tang} y$. Mais la dérivée de $\text{tang} y$, ou $\frac{\eta}{\varepsilon}$, est égale à $\frac{1}{\cos^2 y}$, et $\cos^2 y = 1 + \text{tang}^2 y$; on aura donc :

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = 1 + x^2,$$

et, par suite, en prenant l'inverse :

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Telle est la dérivée de la fonction $\text{arctang} x$.

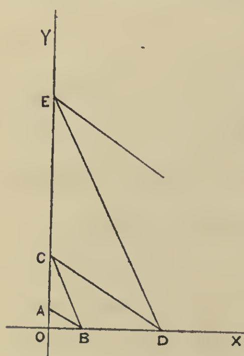
CHAPITRE XIII

L'ATOME ET L'AXIOME DE LEIBNITZ

Nous avons vu, dans les chapitres précédents, qu'on peut avantageusement substituer l'atome au zéro dans la géométrie et la théorie des incommensurables ; nous avons vu également que la question des dérivées se simplifie par la considération du rapport de deux atomes, au lieu de deux zéros. Il est facile de reconnaître aussi que l'atome laisse subsister, avec leur grandeur essentiellement variable, tous les indéfiniment petits du calcul infinitésimal, dont il n'est que le plus petit, ainsi que leurs rapports finis, indéfiniment petits ou indéfiniment grands. Il suffit de remonter au premier théorème d'où nous avons déduit tout le reste de cette étude. D'après ce théorème, il est tou-

jours possible de mener, par un point extérieur à une droite, une sécante qui n'en ait pas de plus grande qu'elle, parmi toutes celles qui sont issues du même point ; la sécante fait alors avec la droite donnée un angle atome qui la détermine, et le rapport de la distance du point à la droite avec la longueur de la sécante est un indéfiniment petit du premier ordre.

Considérons deux droites perpendiculaires entre elles, OX et OY, prenons sur l'une d'élles une longueur OA égale à l'atome linéaire, et menons à l'autre la sécante AB qui fait l'angle atome B ; la distance OB n'est autre chose que le rayon du cercle atome.



Menons de même, par le point B, la droite BC sous l'angle atome, puis la droite CD de la même manière, et ainsi de suite. On aura évidemment l'égalité suivante :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC},$$

chacun de ces rapports étant un indéfiniment petit du 1er ordre. Or, on en tire aisément cette autre égalité :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB^2}{OC^2};$$

donc, le rapport $\frac{OA}{OC}$ représente un indéfiniment petit du 2e ordre.

On trouvera de la même façon que les rapports $\frac{OA}{OD}$, $\frac{OA}{OE}$,..... représentent des indéfiniment petits du 3e, 4e,.... ordre, jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on voudra.

Nous avons supposé que OA est l'atome linéaire; la construction et le raisonnement subsistent intégralement, si l'on choisit arbitrairement pour OA une longueur quelconque. Ce qu'il y a de particulier, lorsque OA est une longueur quelconque, c'est qu'on obtient les indéfiniment petits de tous les ordres successifs en s'éloignant, soit dans un sens, soit dans l'autre, du point de départ; et, ce qui n'est pas moins remarquable, c'est que la même construction interprétée à rebours, c'est-à-dire en renversant les termes du raisonnement, nous donne la série de tous les indéfiniment grands en même temps que celle de tous les indéfiniment petits. La figure ci-contre, dont la forme est liée essentiellement à l'existence de l'atome, nous offre donc l'image de toutes les grandeurs intelligibles, en même temps que celle de tous les rapports

imaginables. L'atome y est représenté comme la plus petite de toutes les grandeurs indéfiniment petites de même espèce, et l'atome numérique comme le rapport de la plus petite des grandeurs indéfiniment petites à la plus grande des indéfiniment grandes.

Quel est, au fond, l'emploi qui a été fait de l'atome numérique dans la définition et le calcul de la dérivée d'une fonction ? Si l'on sait que la fonction croît plus vite que la variable, rien n'empêche de prendre l'atome numérique pour accroissement de la variable ; on est alors en droit de négliger, dans le calcul de l'accroissement correspondant de la fonction, tous les termes qui sont moindres que l'accroissement atomique de la variable, car tous ces termes sont absolument nuls. Si la fonction croît moins vite que la variable, ou si on l'ignore, l'emploi direct de l'atome numérique n'est plus possible ; mais, on prend alors pour accroissement de la variable le plus petit nombre qui produise un atome d'accroissement dans la fonction, et l'on est encore en droit de négliger, dans le calcul de l'accroissement correspondant de la fonction, tous les termes qui sont moindres que ce nombre, attendu que ces termes

ne peuvent avoir aucune influence pour accroître la fonction, ce nombre étant le plus petit qui produise un accroissement correspondant.

Comme conséquence, si l'on a formé une équation entre des indéfiniment petits de différents ordres, et qu'on veuille en dégager la relation propre à ceux qui sont de l'ordre le moins élevé, il suffira de supprimer purement et simplement tous les autres ; en d'autres termes, il est permis de négliger, dans un calcul d'indéfiniment petits d'un certain ordre, tous les indéfiniment petits qui sont d'un ordre supérieur.

Leibnitz, l'inventeur du calcul différentiel, admettait que ces indéfiniment petits, d'un ordre supérieur à ceux qu'on conserve, sont négligeables comme des grains de sable par rapport à tout le globe terrestre. Lagrange et Carnot l'ont admis aussi, en regardant les équations comme des relations que la présence des indéfiniment petits d'ordre supérieur rend imparfaites, mais qui deviennent parfaitement exactes à la fin du calcul, les erreurs se redressant et se compensant par le fait même des opérations. M. de Freycinet, dans ses *Essais sur la philosophie des sciences*, p. 108, en a donné la vraie raison : on peut négliger ces indéfiniment petits, dit-il, « parce que ces indé-

finiment petits d'un ordre supérieur sont sans influence sur les limites ».

Telle est aussi notre opinion ; mais il semble qu'en allant, avec M. de Freycinet, jusqu'à la limite zéro, on dépasse l'instant où la démonstration est vraiment efficace. Dès qu'on considère zéro comme la limite d'un indéfiniment petit d'un certain ordre, il est certain qu'à cette limite tous les indéfiniment petits d'ordre supérieur s'annulent ; mais lui-même s'annule en même temps, et les équations du calcul se réduisent alors à de simples identités, sans signification ; au contraire, si l'on s'arrête à l'atome comme limite, on reste en présence d'équations qui ne sont pas des identités, d'une part, et dans lesquelles, d'autre part, certains termes deviennent nuls ou de nul effet, d'après la théorie atomique ; ce sont précisément ceux qui représentent des indéfiniment petits d'un ordre supérieur à celui qu'on conserve. L'atome ne peut donc pas se montrer sans entraîner, par voie de conséquence, l'axiome de Leibnitz ; tandis que, si l'on s'en passe ou si on le confond avec zéro, la justification de l'axiome manque d'efficacité.

La théorie atomique offre ainsi des avantages incontestables sur la divisibilité à l'infini, jusque dans les principes fondamentaux de l'analyse.

CHAPITRE XIV

AUX CONTRADICTEURS DE L'ATOME

Nous ne nous dissimulons pas que, en raison de sa nouveauté même, notre théorie va susciter ou ressusciter de nombreuses contradictions. La première qu'on lui fera, et qui est déjà faite, c'est qu'il n'existe pas de grandeur, sans que cette grandeur ait quelque étendue, qu'elle ne peut pas avoir quelque étendue sans être divisible, et enfin qu'elle ne saurait être divisible sans que les parties ne soient moindres que la grandeur même. Il n'y a donc pas de grandeur à l'état d'atome.

Cette objection ruinerait tout notre travail ; mais, il faut savoir que cette objection repose sur une erreur, moitié philosophique, moitié mathématique, des plus communes, et aussi des plus

complètes. Elle suppose en effet qu'une grandeur ne peut pas exister avec quelque étendue sans être divisible d'une manière ou d'une autre. C'est bien là, il est vrai, ce qui se produit d'ordinaire : vous amenez une droite, par exemple, en la faisant tourner autour d'un de ses points, à être perpendiculaire, puis oblique à une droite fixe ; le pied de la droite mobile aura parcouru dans l'intervalle une certaine distance sur la droite fixe. Il est clair que, si vous augmentez ou diminuez cette distance par un mouvement de plus, dans le même sens ou en sens contraire; on peut supposer l'accroissement correspondant assez petit pour qu'il soit une certaine partie aliquote de la distance entière. On pourra donc passer de cette partie aliquote à la distance entière par une multiplication, ou de la distance entière à la partie aliquote par une division ; en d'autres termes, cette distance est divisible d'une manière ou d'une autre. Mais il n'en est pas toujours ainsi ; si vous amenez la droite mobile, en continuant à la faire tourner autour du même point, à ne plus rencontrer la droite fixe, ce qui est toujours possible, la distance de son pied à celui de la perpendiculaire, après avoir augmenté, devient infinie, alors qu'un peu auparavant elle était simplement indéfiniment

grande, c'est-à-dire aussi grande qu'on le veut. Or, on ne peut pas dire qu'en devenant infinie elle a perdu l'étendue qu'elle avait, et vous admettez qu'il n'y a aucun moyen de passer de l'indéfini, si grand qu'il soit, à l'infini par une multiplication, ni de revenir de l'infini à l'indéfini par une division : l'indéfini multiplié par un nombre ne donne pas l'infini, et l'infini divisé par un nombre ne donne jamais l'indéfini. De même, si vous ramenez la droite mobile vers la perpendiculaire de manière à ce que la distance de leurs pieds, après avoir diminué, devienne nulle, ce qui est toujours possible, vous admettez qu'il n'y a aucun moyen de passer de la distance nulle à celle qui ne l'est pas, si petite soit-elle, par une multiplication, ni inversement par une division ; zéro multiplié par un nombre ne peut pas donner une quantité et une quantité divisée par un nombre ne devient jamais zéro. Une grandeur peut donc être augmentée autrement que par une multiplication et être diminuée autrement que par une division, ou, ce qui revient au même, une grandeur peut exister avec quelque étendue sans être divisible d'aucune manière.

S'il en est ainsi, vous ne pouvez pas dire : « Cette grandeur a quelque étendue, donc elle

est divisible » ; c'est la réciproque de cette proposition qui seule est vraie et que vous pouvez affirmer, savoir : « Cette grandeur est divisible, donc elle a quelque étendue ». Mais, rien ne vous autorise à soutenir que tout ce qui a de l'étendue est divisible, puisque nous venons de voir qu'il existe des grandeurs ayant quelque étendue qui ne sont le produit d'aucune multiplication et qui, par suite, ne sont susceptibles d'aucune espèce de division. Ces grandeurs *indivisibles* sont précisément celle qu'on désigne par le mot *infini* et celle que nous nommons l'*atome*.

Il n'est pas inutile de rappeler, à ce sujet, qu'on nomme *grandeurs mathématiques* celles qui sont susceptibles d'augmentation ou de diminution. Cette définition est universellement acceptée, elle convient à tous les genres de grandeur et elle comprend tous les cas possibles dans chaque genre. Si l'on se borne à définir une grandeur comme une agrégation possible de parties, effectives ou idéales, on exclut évidemment de la définition les grandeurs qui n'ont pas de parties, telles que l'atome et l'infini, on fait alors de la géométrie mutilée ; ou bien, l'on est conduit à confondre l'indéfini avec l'infini, et l'atome avec le zéro, on fait alors de la géométrie confuse. La

rigueur géométrique nous oblige à rejeter cette dernière définition comme incomplète, et à adopter la première qui est générale ; à regarder l'atome comme une grandeur qui peut augmenter, ainsi que toutes les autres, mais qui ne peut diminuer qu'en s'annihilant, et l'indéfini comme une grandeur qui peut diminuer, ainsi que toutes les autres, mais qui ne peut augmenter qu'en devenant infinie.

Ces deux propriétés de l'atome et de l'indéfini ont entre elles une corrélation manifeste et essentielle. Le zéro suppose l'atome comme l'infini entraîne l'indéfini, et rien n'est plus curieux que de voir à quel prix l'hypothèse non euclidienne est arrivée à supprimer l'intervalle de l'indéfini à l'infini, en supprimant l'atome.

Soit un point donné hors d'une droite et une sécante indéfinie allant du point à la droite, obtenue par une construction géométrique quelconque. Les géomètres non-euclidiens supposent qu'en continuant progressivement la construction faite jusque-là, on parviendra à atteindre une position de la sécante pour laquelle le point d'intersection sera transporté à l'infini, ce qui leur permet de considérer la parallèle comme la dernière des positions que peut prendre une sécante,

sans cesser d'avoir un point commun avec la droite donnée. Mais rien ne justifie une telle supposition : cette supposition revient en effet à admettre qu'on peut répéter la même opération, arithmétique ou géométrique, un nombre infini de fois, en acte ou en pensée, autrement dit que l'infini en nombre existe, succédant immédiatement à l'indéfiniment grand. Or, il y a longtemps qu'on a fait justice d'une pareille prétention en démontrant qu'*il est impossible d'admettre l'existence d'une série quelconque de nombres prolongée à l'infini.*

Considérons, par exemple, la suite naturelle des nombres entiers, 1, 2, 3, 4, 5, etc. Les carrés parfaits 1, 4, 9, 16, 25, etc., que renferme cette suite, sont en minorité ; de 1 à 10, il y en a trois ; de 1 à 100, dix ; de 1 à 1000, trente et un ; et ainsi de suite. Si donc la suite est supposée prolongée à l'infini, les termes carrés y figureront en très grande minorité. Or, cette condition qui devrait avoir lieu, dans la supposition dont il s'agit, est incompatible avec la même supposition ; car, dans la suite naturelle des nombres entiers, prolongée à l'infini, on devra trouver certainement, avec chaque terme non carré, le carré correspondant de ce terme, et même le carré du carré, etc. Par

conséquent, puisque l'hypothèse d'une série de nombres prolongée à l'infini implique contradiction, cette hypothèse doit être rejetée comme fausse.

La démonstration qui précède a été donnée pour la première fois par Galilée. Dans ses *Leçons de physique générale*, Cauchy dit que cette proposition fondamentale, « qu'on ne saurait admettre l'existence d'une série composée d'un nombre infini de termes », peut se démontrer par les mathématiques de mille manières différentes; et il ajoute que « c'est précisément pour avoir admis l'existence de séries composées d'un nombre infini de termes que de très habiles géomètres ont été conduits plusieurs fois à des résultats inexacts ».

C'est aussi pour la même raison que les non-euclidiens se sont trompés. La construction adoptée par Lobatschewsky, pour atteindre sa parallèle, ne peut pas la lui donner. Aucune construction géométrique n'est capable de nous conduire du fini à l'infini, à force d'être répétée, puisqu'on ne saurait admettre l'existence d'une série quelconque de nombres prolongée à l'infini. Par contre, si l'on a recours au mouvement d'une droite tournant autour d'un point, il n'en est pas de même. Tout d'abord, on a la certitude qu'on atteindra tous les

points d'intersection que peut donner une construction géométrique, jusqu'aux plus éloignés, en réalisant avec la droite mobile et la droite fixe tous les angles possibles, jusqu'au plus petit, qui est l'atome d'angle. Ensuite, par un nouveau mouvement de la droite, si l'on passe de la position où la droite mobile fait l'angle atome à la position suivante, ce nouveau mouvement fait disparaître l'atome d'angle et le réduit à zéro ; en même temps, il produit dans la sécante un nouvel état, qui se traduit dans sa direction par le parallélisme et dans sa grandeur par l'infini. C'est cet intervalle inévitable et immense, de l'indéfini à l'infini, qui échappe à la construction géométrique, dont les non-euclidiens ne tiennent pas compte, en supprimant l'atome, et qui engendre toutes leurs erreurs de raisonnement.

C'est encore pour la même raison qu'on ne saurait admettre, comme vraie, l'hypothèse mystique de la divisibilité à l'infini. En effet, si cette expression veut dire quelque chose, elle signifie précisément qu'il est possible de concevoir une série d'opérations sans fin et aboutissant à zéro. L'aboutissement à zéro a été reconnu absurde, dès le début de cette étude, et la série sans fin n'est pas moins absurde, d'après le principe de Galilée.

L'hypothèse de la divisibilité à l'infini demeure donc à l'état d'idée incompréhensible, tandis que la conception de l'atome découle irrésistiblement de la raison.

Quant aux objections spéciales qu'on pourra faire à notre théorie atomique, telle qu'elle est exposée dans les cinq chapitres précédents, nous les acceptons volontiers, mais à titre provisoire, attendu que toutes les difficultés qu'elle soulève ne sont qu'apparentes et disparaissent à mesure qu'on s'y applique davantage.

CHAPITRE XV

CONCLUSION

Puisqu'il est impossible de concevoir qu'une grandeur variable s'évanouisse, sans passer auparavant par un état de petitesse extrême qui soit moindre que tous les autres, il est permis de désigner par un mot cet état inimaginable, mais concevable, d'une grandeur. Nous l'avons appelé atome et défini par cette propriété, dont on ne peut pas le séparer, savoir que l'atome est la plus petite des grandeurs de son espèce.

En procédant ainsi, nous n'avons fait que nous conformer aux règles qui président à la confection de toutes les premières définitions de la géométrie. C'est, en effet, par un acte de l'entendement pur, traduisant une série d'abstractions successives,

que l'esprit arrive à concevoir un volume, une surface, une ligne et un point géométriques. L'expérience nous montre des corps avec leurs trois dimensions, des épaisseurs de plus en plus minces, des largeurs de moins en moins grandes, mais rien de plus ; et l'œil n'a jamais vu une surface dépourvue d'épaisseur, une ligne sans largeur et encore moins un point sans dimension. Si donc l'esprit conçoit de pareilles figures, qui échappent à tous nos sens, pourquoi ne concevrait-il pas de même un atome ?

L'observation ne fournit jamais au géomètre que des images concrètes ; puis, il s'empare aussitôt de ces images, les dépouille de ce qu'elles ont de matériel et de particulier dans leur objet, et les amène ainsi à un état idéal, qu'on nomme abstrait, sous lequel seulement elles peuvent entrer dans les combinaisons intellectuelles. D'ailleurs, cette opération de l'esprit qui engendre les premières figures géométriques, en épurant des images plus ou moins grossières, suffit à démontrer l'existence même de ces figures, elle donne le droit de les considérer comme autant de résultats possibles, de les distinguer les unes des autres et d'en faire l'objet d'une spéculation logique : c'est leur unique définition.

Les choses ne se passent pas autrement avec l'atome. Nul n'a jamais vu une grandeur qui soit effectivement à l'état d'atome ; mais, tout le monde sait qu'il en existe dans un état voisin et de plus en plus voisin, tout le monde comprend qu'en diminuant une longueur indéfiniment on parvient à la réduire à l'état d'atome avant celui de point mathématique. La définition de l'atome est donc, dans son origine, parfaitement semblable aux définitions générales de la géométrie, et elle a sa place marquée entre celle d'une ligne et celle d'un point.

Nous avons reconnu qu'à tout état atomique d'une grandeur variable correspond, en sens inverse, un état très grand, dans lequel elle devient la plus grande des grandeurs de son espèce. Pour qualifier cet état, nous nous sommes servi du terme « indéfini », malgré tout ce que le mot renferme de vague et d'indéterminé. Cependant cet état maximum est toujours déterminé par l'état minimum qui lui correspond, et les propriétés positives de l'un sont absolument toutes les inverses de l'autre. De même que l'indéfini est une grandeur distincte de l'infini, qui est infiniment plus grand, de même l'atome est une grandeur distincte de zéro, qui est infiniment plus petit.

Si l'on ne tient pas compte, dans la géométrie, de la distinction de l'atome et du zéro, on est forcé d'admettre la divisibilité infinie, qui est mathématiquement absurde ; on est forcé aussi, faute de pouvoir expliquer la continuité d'une ligne à l'aide de simples zéros, de s'incliner devant l'antinomie paradoxale de Kant ; on est forcé enfin, avec Lobatschewsky, d'accepter comme vraie l'hypothèse que la somme des angles de tout triangle est moindre que deux droits, et toutes les extravagances de la géométrie non euclidienne. Ces conséquences sont inévitables, avec la confusion de l'atome et du zéro.

Si, au contraire, on tient compte de la distinction de l'atome et du zéro, les conséquences sont toutes différentes : la divisibilité indéfinie, que tout le monde comprend, remplace la divisibilité infinie ; l'antinomie de Kant n'a plus de raison d'être ; la géométrie classique se vérifie tout entière, car on démontre alors de maintes et maintes manières le célèbre postulatum d'Euclide, et, comme la définition de la ligne droite et celle du plan sont d'ailleurs établies sans conteste[1], il n'en faut pas davantage pour que la géométrie eucli-

[1] V. notre *Essai de géométrie rationnelle.*

dienne devienne une science absolument rationnelle.

Pour atteindre ce but, la définition de l'atome a suffi. Mais, après cela, si l'on essaie de formuler ainsi que nous l'avons fait, les éléments de la théorie de l'atome, on reconnaît sans peine que cette théorie peut expliquer, en le précisant, ce que deviennent certains rapports très usités en mathématiques, comme le sinus et la tangente trigonométrique d'un angle, quand cet angle tend vers zéro et devient atome ; qu'elle présente le même avantage relativement au rapport constitutif de la dérivée d'une fonction, et, en général, dans toutes les questions de limite.

Nous devons donc conclure, d'une part, que l'atome, cet élément méconnu, oublié ou défiguré depuis un siècle et demi, reste la pierre de touche de toute vérité géométrique, et, d'autre part, que, dans toutes les branches des mathématiques, la simplicité et la rigueur n'ont rien à perdre au remplacement général du zéro par l'atome. Si la substitution de l'atome au zéro n'est pas toujours nécessaire, elle est utile partout.

Peut-être nous demandera-t-on pourquoi nous n'avons pas, dans cette étude, cherché à démontrer le postulatum d'Euclide à l'aide des théorèmes

connus de la géométrie ordinaire, plutôt que d'en donner une démonstration basée sur l'atome. Notre réponse sera fort simple : pour démontrer ce postulatum, nous ne pouvions pas nous appuyer sur les théorèmes qui le précèdent et qui en sont indépendants, puisque ces théorèmes sont vrais dans les deux hypothèses ; nous ne pouvions pas davantage nous servir des théorèmes qui le suivent et qui en dépendent, puisque chacun de ces théorèmes suppose, au fond, le postulatum, et, par suite, se trouve contredit par l'hypothèse non euclidienne. Il ne restait qu'une ressource à la critique, c'était d'étudier le point de départ commun aux deux systèmes, dans la définition normale du parallélisme, et d'y découvrir la cause de la divergence qui s'est produite entre eux, à partir de là. Cette cause, c'est là que nous l'avons cherchée et que nous l'avons trouvée : une vue fausse de l'atome, et, par suite, de l'indéfini, voilà toute la genèse de la géométrie non euclidienne.

TABLE DES MATIÈRES

Lyon. — Imp. Pitrat Aîné, A. REY Succ., 4, rue Gentil. — 14576